2.1 神秘的失踪

做这道趣题一定要自己亲自动手才有滋味，否则就会像浮光掠影，印象不深。也就完全失去了吸引人的魅力。

按照图 2-1 所示，把一个正方形分割成 $7 \times 7 = 49$ 个小方格，或者用现成的方格纸（文具店里可以随时买到）更为方便。原图可以分为甲、乙、丙、丁、戊五块。现在加以重新组合。甲块原地不动，乙、丙两块左、右调动；再将丁、戊两块平移并改变为上、下位置。

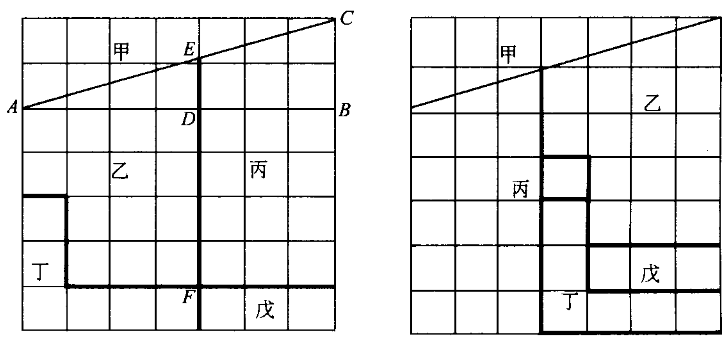

图 2-1

经过这样重新调动与组合，拼成右图的正方形时，怪事出现了：中间竟然露出了一个空洞。也就是说，有一个小方格竟

然莫名其妙地失踪了！最平凡、最简单的调动居然能使一件小东西不知去向，这还了得！当然应该进行追查，查明其真相了。

实际上，这不过是一个小戏法，始作俑者是美国纽约州的一位魔术师保罗·柯里，他利用数字跟大家开了个不大不小的玩笑，确实令人眼花缭乱，从而起到了戏剧性的效果。

其实，上页的右图并不是一个真正的正方形、现在假定左图正方形的边长为 a，很明显，$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 是相似三角形，因而

DE：$BC = AD:AB$，于是 $DE = \frac{2}{7}a \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{49}a$，

$$EF = ED + DF = \frac{8}{49}a + \frac{4}{7}a = \frac{36}{49}a$$

右图那个所谓“正方形”的一边之长为

$$\frac{2}{7}a + \frac{36}{49}a = \frac{50}{49}a$$

也就是说，稍稍比 a 长了一些，但人的肉眼是很难看出这个细微差别的。至于另一边的长，当然仍是 a，所以右图其实是个长方形。而难以觉察的变化所造成的面积之差

$$\frac{50}{49}a^2 - a^2 = \frac{1}{49}a^2$$

就是那个神秘失踪的小正方形了！

换句话说，右图其实比左图的面积稍为大一些，减去中间的那个空洞面积，两者就完全一致了。

有句话说：“戏法人人会变，各有巧妙不同”。有位美国数学教授举出了一个例子：图 2-2 是一个等腰三角形，由九部分组合而成：四个直角三角形，四个矩形，和一个正方形（为了醒目起见，我们特别用阴影标明，并称之为“洞”）。图上各线

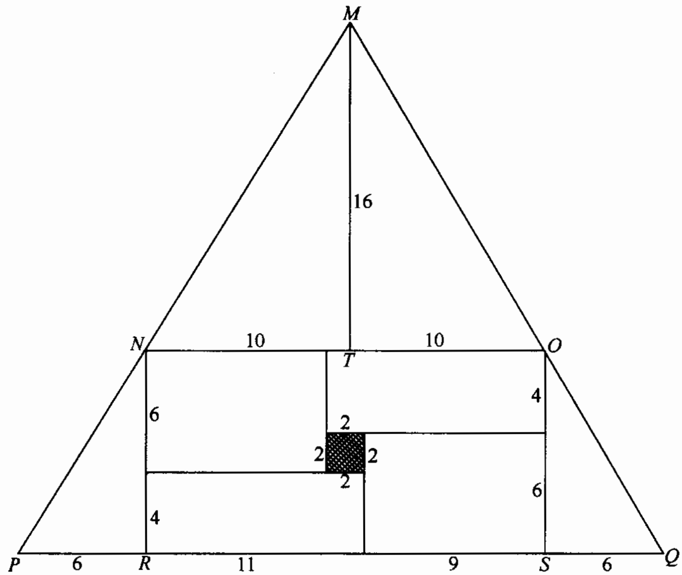

图 2-2

段的尺寸，也已经一一注明，你们不妨把图复印下来，或者自己动手，照比例绘制。

现在请你把图上八个区域的面积算一算，求出它们的总和，但特别关照：那个小洞的面积不要算进去。

计算面积当然是很轻松的，连小学生也会做，不是吗？结果如下

$$\frac{1}{2}\times 20\times 16+2\times\frac{1}{2}\times 6\times 10+6\times 9+2\times 11\times 4+6\times 9$$

$$=160+60+54+88+54=416$$

再求算一下整个等腰三角形的面积，由于 $PQ=32$，而三角形的高 $=16+10=26$，于是三角形的面积就等于

$$\frac{1}{2} \times PQ \times h = \frac{1}{2} \times 32 \times 26 = 416$$

两个答数居然是毫厘不爽的，任何人对此都会感到万分惊讶：

不管有洞没洞，答案竟然相同，岂非咄咄怪事！毛病究竟出在哪里？请找出来。

中国有句老古话："耳闻是虚，眼见是实。"然而眼见的事情有时也未必可靠，就本题而言，毛病就在于：我们的眼睛受骗了，其实 M，N，P 三点并不在同一直线上，用数学术语来说，即三点并不共线。

这可以用反证法来推证。要是 M，N，P 三点共线，则 $\angle MNT = \angle NPR$，于是两个直角三角形 MNT 与 NPR 是相似三角形从而对应边应该成比例，也就是

$$\frac{MT}{NR} = \frac{NT}{PR}$$

然而 $8:5 = 1.6$，而 $5:3 \approx 1.666\cdots$，两个比值虽然相差甚微，但却是不相等的，由此推翻了 M，N，P 三点共线的结论，同样，右侧的 M，O，Q 三点也不在同一直线上。

实际上，这个图形根本不是什么等腰三角形，而是一个五边形，它的五条边是 MN，NP，PQ，QO 与 OM，你用三角形面积公式来计算，当然就大错特错了。

魔术家的"帽子戏法"纵然被拆穿了西洋镜，但其手法却仍然令人赞叹不已。因为铅笔，直尺等绘图工具本身就存在着误差，即使你"一本正经"地认真画图，也很难发现三点并不是真正落在一直线上的。

魔术和数学之间存在着一定的共性：它们都需要用出人意料的技巧，揭露表面现象的迷惑，得出隐藏在幕后的真相。

当今世界上真的存在着职业魔术师出身的著名数学家，他

就是美国斯坦福大学（世界名牌大学之一）的数学教授P. 狄康尼斯（Persi Diaconis），14岁那年离家出走后，曾在纽约街头卖艺，活得很潇洒。为了生计，他只能在夜间前往纽约市立大学上课。结果用了两年半时间，学完了数学系的全部课程，并取得了学士学位。

狄康尼斯对数学的兴趣一发而不可收，他打算再攻读博士学位，想进美国最好的哈佛大学研究生院。于是他请大名鼎鼎的数学科普大师马丁·加德纳（Martin Gardner，1914～　）开了一封介绍信，终于如愿以偿。狄康尼斯的教学与研究工作搞得十分出色，曾获得过一笔20万美元的麦克阿瑟奖金的资助。

事实表明，魔术可以具有很高的学术性和创造性，在数学科普工作中的重要性，目前仅仅是刚刚起步。