

## 1.11 查脚印

巴黎郊外有一座中世纪留下的古老城堡，其年代几乎与著名的“巴黎圣母院”同样久远，因而成了旅游观光的胜地，吸引了来自世界各地的游客。下面这则故事就是出自一位导游之口：

古堡的顶层有一座尘封的钟楼，里面住着一个怪人，唯一的对外通道是个走起路来嘎嘎响的、陡峭异常的木质楼梯，大约有几十级，但肯定不到一百级。

某日黄昏，怪人的四位互不相识的朋友阿列克赛（A）、巴顿（B）、克林（C）、杜邦（D），几乎在同一时间先后来访。他们发现怪人已经被人杀害了，房间里面尽是血水。

当下四人大惊失色，争先恐后地拼命逃走。从脏乱不堪的

狭窄楼梯（一次只能通过一人）跑下来，阿列克赛一步下 2 级台阶，巴顿一步下 3 级台阶，克林一步下 4 级台阶，而杜邦的本事最大，竟是一步能下 5 级台阶。

出事以后，侠盗亚森罗宾乔装成一名体面的上流社会绅士，自告奋勇地前来侦破此案。他发现，同时印下四个人脚印的台阶仅在最高处和最低处。

为了追查凶手，脚印混乱了就不好办，于是亚森罗宾特别重视只留有一个人脚印的台阶。后来的结果充分证明他的看法是正确无误的，最后终于抓获凶手，把他绳之以法。

现在要问你的是，通向钟楼的木楼梯上有多少级台阶印下了一个人（不问是谁的）的脚印？

由于 4 的倍数肯定是 2 的倍数，所以克林的情况可以不必考虑，这就省掉了一个人，2, 3, 4, 5 的最小公倍数是 60，而 60 又小于 100，所以钟楼的木楼梯共有 60 级台阶。

阿列克赛的脚印落在第 2, 4, 6, 8, 10, 12, …, 58, 60 级台阶上，但应排除  $2 \times 3$  及其倍数的各级阶梯；同理，还需要排除 4 的倍数的各级阶梯和 5 的倍数的各级阶梯。于是剩下第 2, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58 共八级。其一般形式为  $2 \times p$ （其中  $p = 1$ ，以及除去 2、3、5 以外的素数）。

巴顿的脚印落在第 3, 6, 9, 12, …, 60 级阶梯上，但应排除混有别人脚印的第 6, 12, 15, 18, ……级阶梯，剩下第 3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 共八级。

前面已经说过克林的情况可以不考虑了，最后再来看一下杜邦的情况。很明显，只留下他一个人脚印的阶梯是第 5, 25, 35, 55 级，共四级。

所以，问题的答案是  $8 + 8 + 4 = 20$  级。

本题自然也可以用其他办法来解决，例如用“奥数”培训教材中所讲的“容斥原理”等，真是条条道路通罗马，所以说它是一道很有趣味的好题。