

## 獐兔鼠，知多少？

徽州自古商业发达，徽商足迹遍及全国，素有“无徽不成镇”的说法。经济上去了，文化也就昌明。现在大家都已公认，“徽班进京”后来就逐渐发展演变，实为京戏之源头。

号称珠算一代宗师的程大位先生也是徽州休宁人。他的名著《算法统宗》一书，收集了许多来自民间采风的歌谣体算题，迄今流传不衰。

大凡来自民间的古算题，总是带有浓郁的乡土气息，而且一般都有点押韵，读起来琅琅上口，过目不忘。例如下面的一则歌谣：

獐十八，兔三斤，  
老鼠四两不为轻。  
九十九个头，  
合起来是一百斤。  
三种猎物各多少？  
快快说来听一听。

（旧制一斤 = 十六两）

解这道题，好像是在做游戏，可以各说各做。

民间人士，采用的是土办法。为了土法上马，他们制定的原则是“獐为主，兔定边，老鼠量轻可补添”。獐一只

重 18 斤,老鼠 4 只合起来才 1 斤重(照现在新的度量衡制,1 斤 = 500 克,于是可推算出,1 只老鼠重 125 克,大得吓坏人了!这种大老鼠,当然非捕杀不可),孰轻孰重,不言而喻。

如果獐有 5 只,一看就不可能。

假定獐数为 4,由于  $4 \times 18 = 72$ ,  $99 - 72 = 27$ ,还剩 27 头动物,27 斤重量。

按题意,老鼠只数应是能够被 4 整除的,所以我们只能拿 92,88,84,80,……等去试试。

如果有 92 只老鼠,则因

$$92 \div 4 = 23,$$

而  $28 - 23 = 5$ ,但 5 与 3 是互质数,根本凑不起来。

再拿 88 只老鼠去试,

$$88 \div 4 = 22,$$

剩下来的兔子数当然是  $99 - 88 - 4 = 7$ 。

然而 7 只兔子的重量是 21 斤,

$$22 \times 21 = 462,$$

462 与 28 根本碰不拢。所以 4 只獐的设想也被否定了。

再退一步想,设有 3 只獐,由于  $3 \times 18 = 54$ (斤),尚余 46 斤。因为 100 只老鼠才有 25 斤,而 100 这个数不能用,所以兔的重量必须大于 21 斤。

这就强烈地提示了兔的只数为 8。下面果然一举成功,轻轻松松地找出了答案:

獐 3 只 兔 8 只 老鼠 88 只

$$\begin{cases} 3 \times 18 + 8 \times 3 + \frac{1}{4} \times 88 = 100, \\ 3 + 8 + 88 = 99. \end{cases}$$

两个条件都能满足,问题迎刃而解矣。

下面再来介绍利用不定方程的解法。假设有獐  $x$  只,兔  $y$  只,老鼠  $z$  只,则据题意可列出方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 99, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x + 3y + \frac{1}{4}z = 100。 & (2) \end{cases}$$

(2) 式乘以 4,去分母后可得

$$72x + 12y + z = 400, \quad (3)$$

(3) - (1),消去  $z$ ,于是就有

$$71x + 11y = 301。 \quad (4)$$

这是一个二元一次的不定方程,为了求它的正整数解,可先变换为

$$y = \frac{301 - 71x}{11} = 27 - 6x + \frac{4 - 5x}{11}。$$

令  $s = \frac{4 - 5x}{11}$ ,于是有  $11s + 5x = 4$ ,

$$\text{即} \quad x = -2s + \frac{4 - s}{5}。 \quad (5)$$

再设  $t = \frac{4 - s}{5}$ ,便有  $5t + s = 4$ ,

$$\text{即} \quad s = 4 - 5t。 \quad (6)$$

代入(5),便得出

$$x = 11t - 8, \quad (7)$$

以(7)式再代入(4)式得:

$$y = 79 - 71t, \quad (8)$$

再将(8)式代入(3)式得

$$z = 60t + 28。 \quad (9)$$

到此地步,我们总算得到了用参数  $t$  表示  $x, y, z$  的

通解表达式。

由于  $0 < x \leq 3$ , 代入(7)式后可求出

$$t = 1,$$

从而可以解出

$$x = 3, y = 8, z = 88。$$

以上解法尽管中学生还算能够理解与消化,但是另外又得引进新的变量  $s$  与  $t$ ,代进代出,搞得头昏脑涨,繁琐得要命。

我倒不是存心否定不定方程解法,但用它来解决“獐兔鼠问题”确实有点得不偿失,看上去就像“大炮打苍蝇”,惹人笑话。

其实,我们完全可以用“土洋结合”的办法来解上面的不定方程

$$71x + 11y = 301。$$

关键的思路是利用数的整除性。要知道 71 是个比较少见的素数,至于 11 的整除性则一眼就可以识别。明摆着不去利用,不是傻瓜吗?

很明显,  $x = 5$  是不行的,因为其时方程右边将得出负数了。

若  $x = 4$ , 则  $11y = 301 - 284 = 17$ , 由于 17 根本不能被 11 整除, 于是  $x = 4$  马上就被否定了。

类似地,  $x = 1, x = 2$  时, 常数项将分别变为 230 与 159, 统统都不能被 11 整除, 于是  $x = 1$  与  $x = 2$  又马上被否定。

唯一可能的只能是  $x = 3$ , 此时  $11y = 88$ , 于是立即可以求出  $y = 8$ 。

剩下的  $z$  自然立即露头, 哪还用说?

常言道“货比三家不吃亏”，又道是“看菜吃饭，量体裁衣”，我们一定要通过合理解题来提高自己的素质与技艺，而不能顽固不化，墨守成规。要知道，高深的方法未必就比初等办法好。

老实告诉你，本题所说的不定方程解法还不是最繁琐、最难懂的一种。另有一种解法更加复杂和拖沓，需要计算的工作量也更大，甚至叫大学生去做，也不是那么容易。

