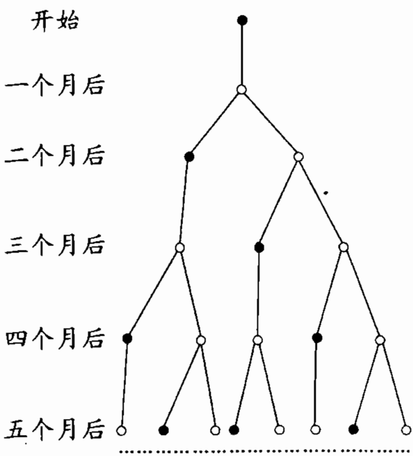
# 可以浓缩的兔子数列

有一对刚出生的小兔子，一个月后，长成大兔子；再过一个月，生出了一雌一雄的一对小兔。三个月过后，大兔又生一雌一雄的一对小兔，而原先的小兔长成了大兔。就这样不断地在繁殖。总之，每过一个月小兔可以长成大兔，而一对大兔，每一个月总是能生出一对小兔。这些兔子，自始至终都不死掉。试问：一年以后，共有多少对兔子？

不妨画出一个图，以便寻找兔子数列的规律。如左下图，图中黑圈（●）表示小兔的对数，白圈（○）表示大兔的对数。




显然，兔子数总是由两部分组成：大兔数和小兔数。当月的小兔数，就是上月的大兔数，因为上月有多少对大兔，下月就有多少对小兔；而当月的大兔数，则是上月的兔子总数，因为不管大兔、小

兔，到了下个月都是大兔。根据这一结论，又可知道，上月的大兔数是前月的兔子总数。所以，当月的兔子数等于上月的兔子数加上上月的大兔数，也就是等于上月的兔子数加上前月的兔子数。

于是就可以写出开始时、一个月后、二个月后，直至12个月后的兔子对数：

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233。

所以本题的答案是233对。

一般把这个兔子数列称为斐波那契数列，因为它是由意大利数学家斐波那契在公元1228年首先提出的。它的第一、第二项为1，而从第三项起，每一项等于它的前两项之和，写成一般形式就是：

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

斐波那契数列不但有趣，也很有用。它的前 $n$ 项和是：

$$S_n = F_{n+2} - 1,$$

并且数列中前后两项之比 $F_n : F_{n+1}$，当 $n$ 越来越大时，其比值逼近

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618。$$

因此，斐波那契数列在运筹学和优选法中有不少用途。

然而，正是由于应用太多，精力过于分散，浮光掠影式的东西往往在眼前一瞥而过，人的大脑反应不过来，最有价值的、涉及本质的自然规律反而被漠视了。下面的故事兴许就能说明问题。

有一次，我偶尔在美国出版的数论书里看到 $\frac{1}{89}$ 的完

整小数展开式：

$$\frac{1}{89}=0.\dot{0}112359550561797752808\mid 988764044943820224719\dot{1}$$

（原书上没有中间的一根纵线，它是我加上去的）。

这是一个循环小数，其循环节多达44位。根据循环小数的有趣性质，自然可以把它“一分为二”，使前后对应各位的数字之和为9。由此可知，我们只要求出前面的22位，它的全貌也就完全掌握了：

$$\begin{array}{r} 0112359550561797752808 \\ 9887640449438202247191 \\ \hline 9999999999999999999999 \end{array}$$

我想把它抄录下来，作为备用资料。抄着抄着，忽然引起了联想：那前面的5个有效数字11235，不就是斐波那契数列的前5项吗？可惜从第6个有效数字开始，规律被彻底破坏，真是太遗憾了。

兔子数列是一个古老的课题，由于一再重复，许多人对它已失去了兴趣，作为游戏的题材，似乎太乏味了。但这时我的心头忽然袭来一丝直觉，心中暗想，或许还有什么潜伏得很深的东西有待发现！于是我索性“一不做，二不休”，把数列在233以后的各项也一口气写了出来：

…，34，55，89，144，233，377，610，987，1597，2584，4181，6765，10946，17711，28657，46368，75025，121393，…

自然还可以无穷无尽地写下去，但我现在已经写到了六位数，看来似乎可以“收兵”了。

此时我突然脑子开窍，“领悟”到规律其实并未受到破坏，只是被“十进位”制掩盖了“真相”；数字有一种“鹊巢鸠占”的现象，好比有人“无票乘车”，挤占座位，结果造

成两人或两人以上挤在一个位置上！为了恢复其本来面目，我们自然可以稍加变通，用特殊的“长加法”表达出来：

0112358
13
21
34
55
89
144
233
377
610
987
1597
2584
4181
6765
10946
17711
28657
46368
75025
121393 ⋱
0112359550561797752808 75443 …

做到这里不难看出，已经有6个人坐在同一个位置

上。随着数列的向右进展，这种“恶性”现象还将变本加厉，但前面各位上的数字已成定局，不会受到进位的影响了；此时我们已经发现，前面的22位小数与$\frac{1}{89}$的循环小数完全吻合，不存在丝毫差异！

斐波那契数列既非等差数列，也非等比数列，更非调和数列，为什么它竟能浓缩在$\frac{1}{89}$的十进制循环小数表达式中?!

这使我们马上想起《天方夜谭》里的故事：一个巨大得能头顶天脚立地的妖怪，竟能浓缩在一只小小的漂流瓶里！

$\frac{1}{89}$，你好神奇啊！