# 非法约分

美国人喜欢猎奇，不屑一顾的小事，他们也往往抓住不放，刨根问底，搞个水落石出。“非法约分”便是一个相当典型的事例。

据说这个问题是马克士威尔在其著作《数学中的谬误》一书中首先提出的。

有个小学生漫不经心地进行了下面的令人笑掉大牙的所谓“约分”：

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}。$$

这事当然可以写进“现代版”的《笑林广记》。令人惊讶的是，约分虽然不合法，但答案倒是对的。这不是一桩奇事吗？

对此奇事，有人紧紧抓住不放。而且，即以“大笑话”为题，悬赏征解这些出人意料的分数。如果还有什么类似的东西“潜伏”在什么“阴暗角落”里，就统统把它们挖掘出来。

有一点需要说明一下，一旦我们找到这类分数，把它们分子、分母颠倒一下，肯定仍是满足条件的。另外，还

有下列这类平凡、肤浅的解，例如：

$$\frac{8\cancel{8}}{\cancel{8}8} = 1。$$

为了排除这类“水货”，我们必须规定，这种分数一定要是真分数。

当分子、分母都是两位数时，可设

$$\frac{10x + a}{10a + y},$$

所谓“非法约分”，意味着下式是成立的，即

$$\frac{10x + a}{10a + y} = \frac{x}{y}。$$

经整理后可得

$$y = \frac{10ax}{9x + a}。$$

由于 $x, y, a$ 都必须是一位的正整数，而且 $x \neq a$（否则将有 $\frac{x}{a} = 1$，违反了真分数的规定），我们自然很容易算出一系列数值，譬如说：

当 $x = 1$，而 $a$ 分别为 $2,3,4,5,6\cdots$ 时，

相应的 $y$ 值为：$\frac{20}{11}, \frac{30}{12}, \frac{40}{13}, \frac{50}{14}, 4, \cdots$

由此可见，仅仅在以下 4 种情况下，$y$ 才能得到整数值：

$x = 1$，　$a = 6$，　$y = 4$；

$x = 2$，　$a = 6$，　$y = 5$；

$x = 1$，　$a = 9$，　$y = 5$；

$x = 4$，　$a = 9$，　$y = 8$。

从而求出 4 个奇妙分数，它们是：

$$\frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{49}{98}。$$

人们后来发现，经过两种特殊方法“处理”之后，这些奇妙分数还可以无限地“拉长”。

一种方法是在数字的中间插入 6 或 9，例如：

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1\cancel{66}}{\cancel{66}4}\text{（插入一个 6）}$$

$$= \frac{1\cancel{666}}{\cancel{666}4}\text{（插入两个 6）}$$

$$= \cdots\text{（插入许多个 6）}$$

$$= \frac{1}{4};$$

$$\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4\cancel{99}}{\cancel{99}8} = \frac{4\cancel{999}}{\cancel{999}8} = \cdots = \frac{1}{2}。$$

另一种办法是在尾巴与头上加入 6 或 9，例如

$$\frac{19}{95} = \frac{1\cancel{99}}{\cancel{99}5} = \frac{1\cancel{999}}{\cancel{999}5} = \frac{1\cancel{9999}}{\cancel{9999}5} = \frac{1}{5},$$

等等。

可以证明，当进位的基为素数时，不存在这类奇妙分数。基为 8（即八进位制）时，有两个解，它们是

$$\frac{3\cancel{7}}{\cancel{7}6} = \frac{1}{2}\left(\text{相当于十进位制中的}\frac{31}{62} = \frac{1}{2}\right);$$

$$\frac{1\cancel{7}}{\cancel{7}4} = \frac{1}{4}\left(\text{相当于十进位制中的}\frac{15}{60} = \frac{1}{4}\right)。$$

最有趣的情况是，当“基”是完全平方数，而比基小 1 的数有很多因子时，譬如说，基 $b = 1225$ 为 35 的平方，而 1224 又有很多因子，这时竟能找到 236 个分数进行“非法约分”，而仍能得出正确的答案。