

## 平方数尾巴的秘密

号称“数学之王”的德国大数学家高斯，曾经研究过著名的“平方剩余”问题。

凡是大于9的平方数，其最后二位尾数肯定是下面表中所列举的尾数之一。它们一共有22个，即

00	16	29	49	69	89
01	21	36	56	76	96
04	24	41	61	81	
09	25	44	64	84	

这张表格已被许多数学游戏专家视为设计模本，例如有人指出，凡是尾数为6的平方数，它的前一位必定是奇数。这个性质虽然简单，许多人却是茫然无“数”的，一经指出之后，方才恍然大悟。

在研究数的某些形式时，它们又是极其有用的信息。譬如说，我们常想确定一个数在加上或减去一个平方数之后，其和或差是否为平方数，这张表格就能帮助我们迅速排除那些不可能的情况。例如我们要想求出一个平方数，使  $5581 - x^2$  为平方数。这时，上述表格就会告诉我们  $x^2$  的最后二位尾数只能是00, 25, 56或81。这样一来就能很快求出

$$x^2 = 4356 = 66^2,$$

而  $5581 - 4356 = 1225 = 35^2$ 。

以 1,4,9 为末位的“尾巴”各有 5 个。然而,以 5 结尾的却只有唯一的“孤家寡人”——25。

另外,二位尾数 00 与 44 是具有相同数码的唯一结尾。当然,作为平方数,任意多的偶数个零来结尾是可能的。然而,任何平方数的尾部决不可能出现三个以上的 4。加德纳先生说过, $38^2 = 1444$  是这类数字中的最小者,它同下一个数

$$462^2 = 213444$$

中间空出了一大段。在此之后,接下去的两个则是

$$538^2 = 289444$$

与  $962^2 = 925444$ 。

一般地说, $500x \pm 38$  是平方以后尾巴上有三个 4 的数,此处的  $x$  可取任意自然数值。

迄今为止,平方数后面尾巴上  $n$  位的周期性还是一片“无人区”,很少有人去探讨过。