

## 天平秤找次品

某工厂生产了一批乒乓球，在质量检验时，不小心把一只次品乒乓球与 11 只正品混在一起去了。由于次品乒乓球除了在重量上与正品不同外，其余属性（如大小、外貌等）完全一样，因此无法从外表上把它区分出来。现在只有一架没有砝码的天平，要求读者只能称三次，就把这只次品乒乓球找出来，并要弄清楚次品比正品重还是轻。

这个问题有若干种解法，现仅介绍两种：

解法一（普通解法）：

为了方便，将这 12 只乒乓球编成①、②、③、④、…、⑫等 12 个号码。

第一次称，先将 12 只乒乓球任意分成三组，每组 4 只，然后把任意两组置于天平两端（如①、②、③、④和⑤、⑥、⑦、⑧），天平就有平衡和不平衡两种情况。

一、天平平衡。则次品就在⑨、⑩、⑪、⑫这一组中。这时可以把⑨、⑩、⑪、⑫中的任两只（如⑨、⑩）放在天平的一端，另一只（如⑪）和一只正品放在天平的另一端进行第二次称。它也有平衡和不平衡两种情况：

（一）天平平衡。则⑫就是次品，把⑫和一只正品在天平上进行第三次称时，就能决定⑫比正品重还是轻。

(二) 天平不平衡。次品就在⑨、⑩、⑪之中。假设天平左重右轻(图 3-4 左图, 图中的黑球表示正品, 余同)。将⑨与⑩对换, 并把对换后的⑩再与另外一个正品对换。这时三个可能: 1. 天平变成平衡, 则⑩就是次品, 且比正品轻(图 3-4 右图); 2. 天平不变(仍是左重右轻), 则⑪就是次品, 且比正品重(图 3-5 左图); 3. 天平变成左轻右重, 则⑨就是次品, 且比正品重(图 3-5 右图)。



图 3-4

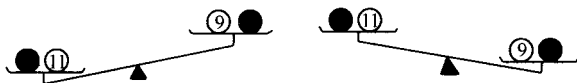


图 3-5

二、天平不平衡。次品就在第一组(①、②、③、④)或第二组(⑤、⑥、⑦、⑧)中。设天平左重右轻(图 3-6 左图)。把天平重端的任意三只(如①、②、③)与天平轻端的任意一只(如⑤)放在天平的左端, 天平重端剩下的一只(④)与三只正品放在天平的右端, 进行第二次称。这时也有三种可能:

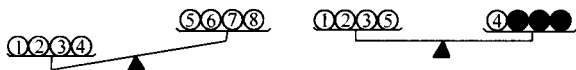


图 3-6

(一) 天平平衡。则次品就在⑧、⑥、⑦中, 且比正品轻(图 3-6 右图)。把⑧、⑥、⑦中的任两只(如⑧、⑥)放在天平上进行第三次称, 如天平平衡, 则⑦就是次品; 如

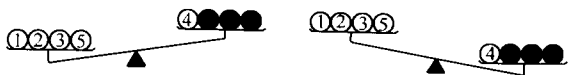


图 3-7

天平不平衡,轻的一端那一只就是次品。

(二) 天平不平衡,仍然是左重右轻。则次品就在①、②、③中,且比正品重(图 3-7 左图)。按上面方法在第三次称量中就能找出那只比正品重的次品乒乓球。

(三) 天平不平衡,但变成左轻右重。则④或⑤就是次品,这时把④(或⑤)与一只正品放在天平上第三次称,就能找出比正品重(或轻)的次品(图 3-7 右图)。

解法二(三进制法):

采用三进制来解决这个问题具有突出的优点。因为三进制的 0、1、2 三个状态正好对应于天平的三个状态:平衡、左重和右重。为了把 0、1、2 三个状态与天平的三个状态按题目需要对应起来,必须进行编码。先把十进制中的 1 至 12 分别用三位三进制来表示,即  $1 \rightarrow 001$ ,  $2 \rightarrow 002$ ,  $3 \rightarrow 010$ ,  $4 \rightarrow 011$ ,  $5 \rightarrow 012$ ,  $6 \rightarrow 020$ ,  $7 \rightarrow 021$ ,  $8 \rightarrow 022$ ,  $9 \rightarrow 100$ ,  $10 \rightarrow 101$ ,  $11 \rightarrow 102$ ,  $12 \rightarrow 110$ 。其中,001,010,011,012 用粗笔写,其余均用细笔写。然后,再将 0 与 2、粗字与细字对换,这样就组成了符合题目需要的 12 个粗字和 12 个细字的两组编码(如图 3-8)。这样,表示天平平衡状态的 0、1、2 三个数,在每组编码中都具有同等的地位,即 12 个粗字(或细字)一组的数字中的第一位、第二位和第三位数字,均有 4 个 0、4 个 1、4 个 2。编码后,把这 12 个粗字和 12 个细字码分别写在乒乓球的上面和下面。

第一次称:取粗字编码中第一位数是“0”的 4 只放在

十进制	三进制	0与2、粗字与细字互换后
1	<b>001</b>	221
2	002	<b>220</b>
3	<b>010</b>	212
4	<b>011</b>	211
5	<b>012</b>	210
6	020	<b>202</b>
7	021	<b>201</b>
8	022	<b>200</b>
9	100	<b>122</b>
10	101	<b>121</b>
11	102	<b>120</b>
12	110	<b>112</b>

图 3-8

天平的左端,第一位数是“2”的4只放在天平的右端。如天平平衡,便可肯定表示次品编码的第一位数是“1”;如果天平左重,设次品比正品重(第二、第三次称时也这样假设),则次品编码第一位数是“0”,反之,次品编码第一位数是“2”。

第二次称:将粗字编码中第二位数是“0”的4只放在天平的左端,第二位数是“2”的4只放在天平右端,其判别法与上相同,可决定次品编码的第二位数。

第三次称:把粗字编码中第三位数是“0”的4只放在天平左端,第三位数是“2”的4只放在天平的右端,其判别法同上。同样可决定次品编码的第三位数。

经过三次称量,根据天平的平衡与下落情况,就可以决定次品的编码。然后,先在粗字编码中寻找这个数字,

如果找到的话，这只乒乓球就是次品，并且确实比正品重；如果找不到，那么必定可以在细字编码中找到，这说明我们前面假设次品比正品重是不对的，它应比正品轻。

例如，第一次称量结果是右重，第二次是左重，第三次平衡，则次品编码就是“201”；而“201”正好在粗字编码中，所以次品比正品重。再如，三次称量结果分别是左重、右重、平衡，则次品编码是“021”；而“021”正好在细字编码中，所以次品比正品轻。

