

弹子盘上的数学

怎样平分八斤油

下面是一个古老的问题：有一个装满 8 斤油的油瓮，另外还有两只空瓶，一只可装 5 斤，一只可装 3 斤。现在要将油瓮里的油，利用这两只瓶倒来倒去，平分为两个 4 斤。问应当怎样做？

据数学史记载，首先提出这个问题的人是 16 世纪的意大利数学家尼古拉·芳旦那(Nicola Fontana)。代数学上三次方程的一般解法，就是这位学者第一个研究出来的。对于上述问题，他的解法如下(共分 8 个步骤)：

- (1) 先从油瓮里倒 3 斤油装满小瓶；
- (2) 把小瓶里的 3 斤油倒入大瓶；
- (3) 再从油瓮里倒 3 斤油装满小瓶；
- (4) 再把小瓶里的油倒满大瓶，因为大瓶装满是 5 斤，所以小瓶里剩下 1 斤；
- (5) 把大瓶里的 5 斤油倒还油瓮里，这时油瓮里一共有 7 斤油；
- (6) 把小瓶里的 1 斤油再倒入大瓶；
- (7) 再从油瓮里倒 3 斤油装满小瓶，这时油瓮里就剩

下 4 斤油了；

(8) 最后把小瓶里的 3 斤油倒入大瓶，于是大瓶里也是 4 斤油了。

用弹子盘来解决

上面这种办法，好像完全是“凑”出来的；那么，有没有比较普遍的解法呢？

让我们举一个数字的例子来说明。有一只油坛，里面装着许多油，还有两只空油瓶，一只可装 7 两，另一只可装 11 两；限定只能用这两只瓶作为量器，允许倒来倒去，问怎样才能恰好“称”出 2 两油来？

这个问题自然可以用代数办法来解决，但是 1939 年一位数学家想出了一个无比巧妙的方法：设想有一个内角为 60° 的平行四边形弹子盘，一边长 7 个单位，另一边长 11 个单位；为了便于看出弹子的撞击路线，在盘内划分出许多小的正三角形，并在各条边上注明长度单位。

现在开始打弹子了（见图 3-1）。从左下角开始，沿着底边（边长为 11 个单位的一边）打，这样，弹子就到达了图上的 A 点，此点的坐标是 (11, 0)；它的意思便是：从油坛里倒出 11 两油来装满大瓶。

弹子撞着了壁，就要碰回来，弹子便从 A 点到达了图上的 B 点，坐标是 (4, 7)；它的意思是：从大瓶里倒出 7 两油来装满小瓶，这时，大瓶里还有 4 两油，而小瓶里有 7 两油。这样我们容易看到，第一个坐标便是大瓶里装油的数量，第二个坐标是小瓶里装油的数量。

以下不必多说，读者完全可以按照弹子在各边上的

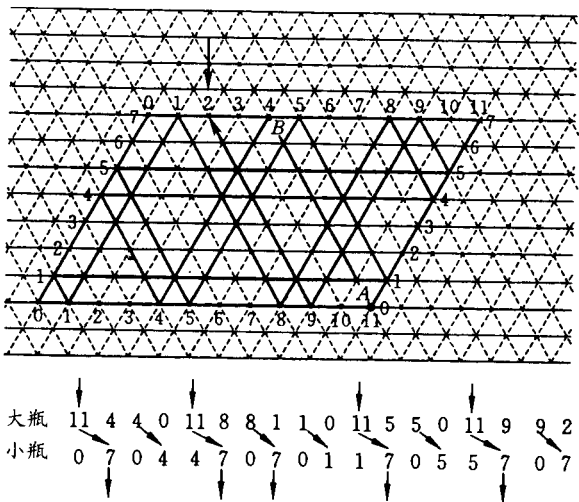


图 3-1

位置，翻译成日常的语言，得出相应的倒油步骤。这样，经过 18 步之后，弹子到达了图上的(2,7)这一点，这时大瓶中恰剩下 2 两油，满足了问题的要求。

为了读者参考的方便，我们在图 3-1 下印出了倒油的步骤。这里斜的箭头表示油从大瓶倒到小瓶，大瓶上面的箭头表示油从油坛倒入大瓶；小瓶下面的箭头表示油从小瓶倒回油坛，数字是油的两数。

对本问题来说，上面这个 18 步的解法还不是最简单的。那么怎样才能找出最省事、最便捷的办法来呢？仍然可以用“打弹子”的办法来寻找答案，不过，这一次我们换一种打法，就是把弹子从左下角沿着边长为 7 个单位长的一边打去，然后观察弹子的经过路线，以确定相应的倒油办法。这一次，我不再把图画出来了，聪明的读者，

请你们自己去试一试，你们将会看到，这一次只要 14 步就能达到目的。而 14 步，正是这个问题的最优解，再少步骤是不可能的了。因此，我们看到，“打弹子”的办法不仅给出了问题的巧妙解法，而且还能找到它的最佳解法！

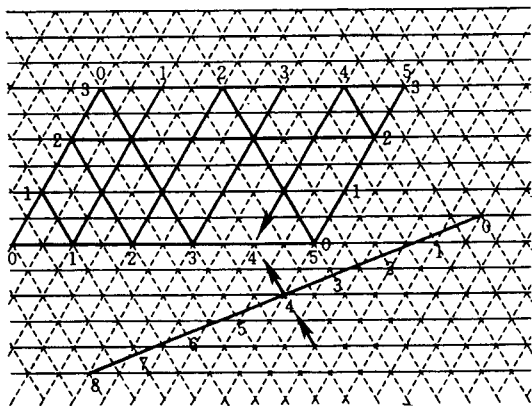


图 3-2

了解这种解法以后，就可以反过来谈谈开始所提到的平分 8 斤油的问题。图 3-2 是根据题意画出的弹子盘。如果打弹子从左下角开始，沿着边长为 3 个单位的一边打去，我们就可得到前面所作的解法，总共是 8 个步骤。但是，如果打弹子是从左下角开始，沿着边长为 5 个单位的一边打去，如图 3-2 所示那样，那就只要 7 步，比前面所讲的办法更简单。

几点说明

“弹子盘”还继续告诉我们一些有趣的事实：

(1) 在三只瓶倒来倒去的情况下，当较小的两只瓶的

容量是互质数,最大一只瓶的容量等于或大于两瓶容量之和时,可以用倒来倒去的办法,称出1两、2两、3两,一直到中间那只瓶的容量的油来。例如,有3只瓶,分别可装15、16与31两油,这时由于15与16是互质数,并且31等于15与16两数之和,所以可以“称”出1两、2两、3两,一直到16两的油来。

(2) 当较小的两只瓶的容量不是互质数时,用倒来倒去的办法,就不一定能“称”出1两、2两、……直到中瓶容量的油来。例如三只容量分别为4、6、10两的油瓶,随便怎么倒,总“称”不出7两(或其他奇数)油来。

(3) 当较小的两只瓶的容量是互质数,而最大的一只瓶的容量小于两瓶容量之和时,例如三只瓶的容量各为7、9、12两,这时需要将“弹子盘”割去一只角(图3-3),然后再用打弹子的办法解决。这只角如何切呢? 因为横坐标代表中瓶装油量,纵坐标代表小瓶装油量,当中瓶装9

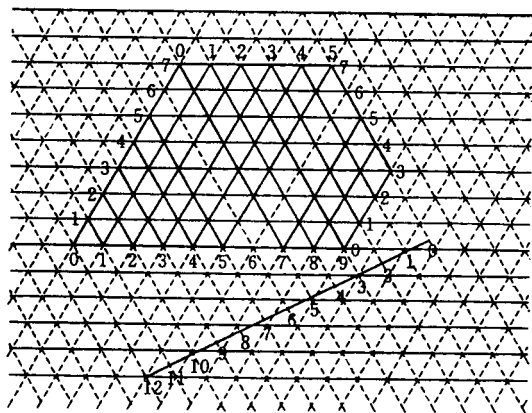


图 3-3

两时,小瓶最多装3两(因大瓶中总共只有12两油),此时的坐标是(9,3);如中瓶装8两,小瓶最多4两,坐标是(8,4);同理其他坐标是(7,5),(6,6),(5,7)。因此我们就将这5个坐标点以外的部分切去,如图3-3。从图中可以看出,在这种情况下,除去6两以外,从1两到9两之间的任何一档都可以“称”出来。

