

数学的力量

有这样一个问题,要你利用两只容量分别为 13 升与 17 升的水桶,得出 15 升水。自来水龙头可以随时随地供应干净水,不受限制;并假定在倒进倒出时,操作十分谨慎,从未发生过损耗。

倒水或倒油问题在数学游戏里是个必不可少的课题。在我国,打从很远的汉代,就有了“韩信分油”的问题。

出人意料的是,这类问题却与不定方程的求解有着千丝万缕的联系。

对本题来说,相当于去求不定方程

$$13x + 17y = 15$$

的整数解。

由于 13 和 17 互质,可以先求出上面这个不定方程的通解:

$$\begin{cases} x = 17k - 8 \\ y = -13k + 7 \end{cases} \quad (k \text{ 是整数})$$

由此得出两组绝对值比较小的整数解:

$$k = 0 \text{ 时, } \begin{cases} x = -8, \\ y = 7; \end{cases}$$

$$k = 1 \text{ 时, } \begin{cases} x = 9, \\ y = -6. \end{cases}$$

这两组解分别决定了两种倒进倒出的办法。

第一组整数解暗示着我们,在 17 升的桶装满水以后,要往 13 升的桶里倒,而后者在装满水后就倒掉。接着再把 17 升桶里剩下来的水倒到 13 升的桶里,然后再将大桶注满水,又往小桶里倒……就这样继续下去,但要记住一条守则:大桶只从水龙头下取水,注满后往小桶里倒,而且只有在倒空之后才能再接水;小桶不能直接从水龙头下注水,只能等待大桶里的水倒给它,而且只有装满一整桶水(13 升)以后才能倒掉。

照以上守则反复做下去,直到大桶在水龙头下注过 7 次水,而小桶倒空过 8 次之后,才能达到大桶内正好装 15 升水之目的。

全部过程可以用列表法给出,这样就可以省掉许多笔墨:

大桶(17 升)	17	4	4	0	17	8	8	0	17	12
小桶(13 升)	0	13	0	4	4	13	0	8	8	13

(接上表)

大桶(17 升)	12	0	17	16	16	3	3	0	17	7
小桶(13 升)	0	12	12	13	0	13	0	3	3	13

(接上表)

大桶(17 升)	7	0	17	11	11	0	17	15	15
小桶(13 升)	0	7	7	13	0	11	11	13	0

这样一解释,你就会恍然大悟。原来,不定方程的第二组整数解 $x = 9, y = -6$ 的“指导”原则,就是改由小桶负责从水龙头下取水,并从它倒向大桶且小桶只有全部倒完后才能再取水;而大桶则只能等待小桶倒水给它了。至于具体的倒水办法,相信聪明的读者一定能造出类似的表格来说明问题。

这样一来,自古以来似乎就很伤脑筋的分油或倒水问题就退化成“例行公事”式的机械照搬了,根本不用动脑筋,今后交给机器人去做就行了。

这就是不定方程的力量。说到底,也就是数学的力量。