

连胜两局

一位学者夫妻和他们十八岁的独生儿子都喜欢下象棋。有一天，儿子向父亲要钱，准备外出和同学欢度周末。

学者犹豫了一会后答道：“今天已经是星期三了，你要下局棋，明晚下一局，后天晚上再下一局。我和你妈妈轮流作你的对手，如果你能连续赢上两局的话，我就给你钱。”

“同谁先下，你呢还是妈妈？”儿子问道。

“那由你决定吧。”学者回答，一面不断地眨眼睛。

儿子知道，父亲的棋艺较精，妈妈要差些。他是应该选“父—母—父”的对局顺序呢，还是应该选“母—父—母”的顺序呢？

以上有关概率的小问题是加拿大阿尔伯达大学的数学家莫塞先生所提出来的。答案不可以只靠猜，一定要有证明才算数。

假定 A 的棋艺比 B 强，若你和他们下棋，如果目的是连赢两局的话，是 $A-B-A$ 的对局顺序胜算来得大，还是 $B-A-B$ 的胜算来得大？

若 p_1 是你可以赢 A 的概率， p_2 是可以赢 B 的概率，那么，输给 A 的概率是 $1 - p_1$ ，输给 B 的概率是 $1 - p_2$ 。

如果你选用 $A-B-A$ 的对局顺序,那么连胜两局的可能性有下列三种:

1) 连胜三局,这种情况发生的概率是

$$p_1 \times p_2 \times p_1 = p_1^2 p_2;$$

2) 先赢前两局,发生概率是

$$p_1 \times p_2 \times (1 - p_1) = p_1 p_2 - p_1^2 p_2;$$

3) 先输一局,然后连胜两局,发生概率是

$$(1 - p_1) \times p_2 \times p_1 = p_1 p_2 - p_1^2 p_2。$$

将这三个概率相加,便得到

$$p_1 p_2 (2 - p_1),$$

这便是你选 $A-B-A$ 顺序而连胜两局的概率。

如果改为 $B-A-B$ 的顺序,仿上讨论可知,三个概率之和将是

$$p_1 p_2 (2 - p_2),$$

这便是选择 $B-A-B$ 的顺序并连胜两局的概率。

p_2 是儿子赢母亲的概率, p_1 是儿子赢父亲的概率,所以 $p_2 > p_1$,故而

$$(2 - p_2) < (2 - p_1)。$$

也就是说, $p_1 p_2 (2 - p_1)$ 要大于 $p_1 p_2 (2 - p_2)$ 。因此,儿子为了获得较大的胜算,应该选择父—母—父的对局顺序。

除了概率分析之外,还有一种常识性的非数学证明(其实不能说“证明”,不过借用一下而已)。要连胜两局,儿子必须要赢第二局,所以第二局一定要和棋艺较差的对手下。另外,对付棋艺较高的棋手,他又一定非胜一局不可,所以一定要和他下两局以决胜负。由此可知,选择

的顺序一定是父—母—父。

本问题是存在着争议的。因为，上述分析并未谈到“和棋”的情况。而事实上，在下象棋时，双方打成平局的情况屡见不鲜，这种概率是不容忽略不计的。

总之，对于一些数学游戏的分析，读者们一定要开动脑筋，不能完全相信书本上的结论。

