金蝉脱壳

这是一种很有趣的数学游戏，也叫“数学脱衣舞”，好像“剥竹笋”，组成多位数的数字一个个地脱落下来，某些本质属性依旧保持不变。

请看下面两组自然数，每组各有三个六位数：

(1) 123789，561945，642864；

(2) 242868，323787，761943。

分别相加以后，它们的和完全一模一样，也就是说：

$$\begin{aligned}&123789+561945+642864\\=&242868+323787+761943。\end{aligned}$$

这样的性质，自然谈不上有什么稀罕。因为，这类数目太多了。可是，请你注意：它们各自的平方和也是相等的，也就是说：

$$\begin{aligned}&123789^2+561945^2+642864^2\\=&242868^2+323787^2+761943^2。\end{aligned}$$

也许你似信非信，那就请你花费些时间，认真算上一算。算过之后，兴许你会由衷地说上一句：“咦，倒是有点神！”

且慢称赞，这不过是序曲而已。好比穿着长大衣或风衣，在展台上亮相的时装模特，还“秀”(Show)不出多少优美的风姿。

现在请把各个数的首位数字抹掉。你将发现，这两组五位数还是那么神，上述奇妙关系依旧成立，即：

$$23789 + 61945 + 42864 = 42868 + 23787 + 61943;$$

平方之后的相等关系也继续保持着，即

$$23789^2 + 61945^2 + 42864^2 = 42868^2 + 23787^2 + 61943^2。$$

事情真有点怪！让我们索性再抹掉首位数字来看看，通过计算，证明上述性质依然保持完好，即：

$$3789 + 1945 + 2864 = 2868 + 3787 + 1943;$$

$$3789^2 + 1945^2 + 2864^2 = 2868^2 + 3787^2 + 1943^2。$$

现在，让我们干脆来个“一不做，二不休”，继续做下去。这时将会发现，每次抹掉首位数字后，这项奇妙性质总是“原封不动”的：

$$789 + 945 + 864 = 868 + 787 + 943,$$

$$789^2 + 945^2 + 864^2 = 868^2 + 787^2 + 943^2;$$

……

直到最后，只剩下个位数了，这一性质还是“岿然不动”：

$$9 + 5 + 4 = 8 + 7 + 3,$$

$$9^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 7^2 + 3^2。$$

接下来，我们还是从原来的两组数目出发。不过这一次我们不妨“反其道而行之”，逐步从末位抹掉数字。令人惊奇的是，这项性质居然还是保存了下来：

$$12378 + 56194 + 64286 = 24286 + 32378 + 76194,$$

$$12378^2 + 56194^2 + 64286^2 = 24286^2 + 32378^2 + 76194^2;$$

……

直到最后，抹得只剩下一位数时也是如此：

$$1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7,$$

$$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2。$$

你们看,奇也不奇?

问题来了,这类数组除此之外,另外还有没有?后来,人们发现,这样的数共有四组,除了上面已经写出来的两组之外,另外还有:

$$2+6+7=3+4+8=15,$$
$$2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2=89;$$
$$1+6+8=2+4+9=15,$$
$$1^2+6^2+8^2=2^2+4^2+9^2=101。$$

为了"金蝉脱壳",怎样添加高位数呢?设高位数为 x,y,z,人们据此列出了下面的等式(从 $9+5+4=8+7+3$ 出发):

$$(10x+9)^2+(10y+5)^2+(10z+4)^2$$
$$=(10z+8)^2+(10x+7)^2+(10y+3)^2。$$

将上式整理化简后,可得到一个不定方程:

$$x+y=2z。$$

若 x,y,z 的值是从 1 到 9 的九个数,每数只出现一次,不能重复,则有以下 16 组解,它们是:

(1,3,2), (1,5,3), (1,7,4), (1,9,5);
(2,4,3), (2,6,4), (2,8,5), (3,5,4);
(3,7,5), (3,9,6), (4,6,5), (4,8,6);
(5,7,6), (5,9,7), (6,8,7), (7,9,8)。

在以上每组数中,头上两个数的先后顺序当然可以对调,于是又可得到 16 组解,例如

(3,1,2), (5,1,3), … ,直到(9,7,8)。

知道了这些事实,读者就可以自己尝试着编出一些"金蝉脱壳"的式子,例如:

首位数可选:9,5,4 和 8,7,3;

末位数可选:1,5,6 和 2,3,7。

而中间的万位数、千位数、百位数与十位数可选:

(1,3,2),(2,4,3),(3,7,5),(5,7,6)。

于是便能得出你所缔造的等式:

$$912351 + 534775 + 423566$$
$$= 823562 + 712353 + 334777,$$
$$912351^2 + 534775^2 + 423566^2$$
$$= 823562^2 + 712353^2 + 334777^2。$$

鉴于可供选用的数组很多很多,"大量生产"金蝉脱壳数组就是轻而易举的事情了。然而,游戏一旦搞到这步田地,新鲜感逐步消失,最终变得淡而无味了。