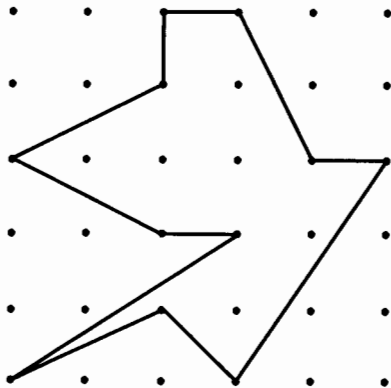


巧算枫叶面积

书里夹着一张美丽的枫叶，它的面积有多大呢？当然不需要十分准确，大致差不多就行。那么，要有什么办法来解决这个面积估算问题？

我们可以利用整数格子来解决。有个定理告诉我们：任意一个以格点为其顶点的多边形，其面积等于内部格点数加上边界上的格点数的一半再减去 1。譬如说下图中所画的多边形面积应是：

$$6 + \frac{11}{2} - 1 = 10.5。$$



对矩形来说,这个公式的正确性显而易见,因为倘若矩形底边的长是 m 个单位,高是 n 个单位,则它的面积是 mn 个平方单位。这时,在矩形的边界上有 4 个顶点,两条底边上有 $2(m-1)$ 个点,两条垂直边上有 $2(n-1)$ 个点,共有 $2m+2n$ 个边界点,内部则有 $(m-1)$ 列与 $(n-1)$ 行,因此共有 $(m-1)(n-1)$ 个内点。

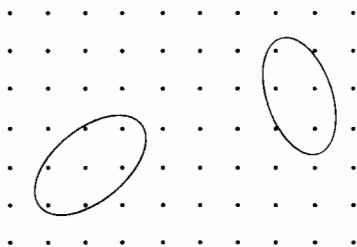
根据上面的公式,可算出:

$$\text{面积} = (m-1)(n-1) + \frac{2m+2n}{2} - 1 = mn,$$

可见它正好等于 mn 个平方单位。

由于任何一个多边形都是由若干个三角形组成的,所以我们最终推出:这个公式对于任意一个以格点为其顶点的多边形都成立。这里所谓的多边形,是广义的,除了常见的凸多边形之外,也包括凹多边形。

如果不是多边形,而是由曲线所围成的区域,也有近似办法。例如为了测算一张叶子的面积,可以用一张画上格点的透明胶片(或有机玻璃片)来覆盖它(如下图),两个格点间的距离为 3.16 毫米。我们数一下落在叶子上的点,如果有 n 个点,则叶子的面积就近似地等于 $10n$ 平方毫米。格点也不一定都要排列成正方形,例如可改用



正三角形点阵。这些都是饶有兴趣且有广泛应用价值的课题,例如计算药用植物叶片的面积、微型雕刻、缙丝工艺品、刺绣等等,都可应用这个办法。

