

❖ 价高价低

月初的时候,某商店有 10 种不同的商品待售,当时各种商品的价格相同.从这一天起,任何接连的两天,后一天每一种商品的价格都是该商品上一天价格的两倍或者三倍.到了下月初,所有商品的价格各不相同.试证:此时商品最高价与最低价的比值大于 27.

证明 设开始时每种商品的价格都是 p 个货币单位. n 天之后,每种商品价格都可表示成 $p2^i3^{n-i}$,这里 i 是价格变两倍的次数, $n-i$ 是价格变三倍的次数.到了一个月之后,有足够多的天数,使得 10 种商品价格各异.这些商品价格虽异,但价格最接近的情形是指数 i 取相继的 10 个整数.例如

$$p2^j3^{n-j}, p2^{j+1}3^{n-j-1}, \dots, p2^{j+9}3^{n-j-9}$$

于是,最高价与最低价之比至少是

$$\frac{p2^j3^{n-j}}{p2^{j+9}3^{n-j-9}} = \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \left(\frac{27}{8}\right)^3$$

因为 $\frac{27}{8} > 3$,所以上面的比值大于 27.