

❖ 聊天小组

一次集会有 n 对夫妇参加,每个人在一段时间内属于某一个聊天小组,称之为团,每个人与他(她)的配偶从不在同一个团内.除此而外,每两个人都恰有一次在同一个团内,证明:若 $n \geq 4$,则团的总数 $k \geq 2n$.

证明 设成员 i 参加 d_i ($d_i \geq 2$) 个团.

(1) 存在 $d_i = 2$, 设 i 仅为团 C_1, C_2 的成员, 则 $|C_1| = |C_2| = n$, 将 C_1 的元素与 C_2 的元素搭配, 得出在 $n \geq 4$ 时有

$$k \geq 2 + (n-1)(n-2) \geq 2n$$

(2) 若所有的 $d_i \geq 3$, 对每个 i , 对应一个待定数 x_i , 令 $y_i = \sum_{i \in C_j} x_i$, 则

$$\begin{aligned} \sum_j y_j^2 &= \sum_j \left(\sum_{i \in C_j} x_i \right)^2 = \sum_j \sum_{i \in C_j} x_i^2 + 2 \sum_j \sum_{i, k \in C_j} x_i x_k = \\ &= \sum_i x_i^2 \sum_{i \in C_j} 1 + 2 \sum_j \sum_{i, k \in C_j} x_i x_k = \sum_i d_i x_i^2 + 2 \sum_{i(\text{不为 } k \text{ 的配偶})} x_i x_k = \\ &= \left(\sum_i x_i \right)^2 + \sum_i (d_i - 1) x_i^2 - 2 \sum_{i(\text{为 } k \text{ 的配偶})} x_i x_k \geq \\ &= \left(\sum_i x_i \right)^2 + \sum_i (d_i - 2) x_i^2 \geq \sum_i (d_i - 2) x_i^2 \geq \sum_i x_i^2 \end{aligned}$$

从而在所有的 $y_j = 0$ 时必有所有的 $x_i = 0$. 由线性代数, 在线性方程组

$$\sum_{i \in C_j} x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \text{ 仅有零解时, } k \geq 2n.$$

3对夫妻 $\{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6\}$ 组成4个团 $\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,1\}, \{2,4,6\}$ 满足条件,这表明 $n \geq 4$ 是不可取消的.