

✦ 换乘电车

在平面图上,城市是一个凸多边形,它的街道是多边形的所有对角线,而街道的交点叫做交叉点(多边形的顶点不算).在该城建有电车交通,每条线路从头到尾贯穿全街,并在这条街道的所有交叉点及其两端设有车站.已知每个交叉点仅有两条街相交,并且其中至少有一条有电车线路.求证:从任一交叉点可乘电车到另一交叉点,换车的次数不超过两次(从一条线路到另一条线路,可在它们的任一公共车站处换车).

证明 设 A, B 是任意的交叉点.用 $a(b)$ 表示两条相交于 $A(B)$ 的街道之一,沿该街道有电车线路(如果相交于 $A(B)$ 的两条街道都是电车线路通过,那么可以从中任选一条作为 $a(b)$ 街).有三种可能的情况:

- i a 街和 b 街重合;
- ii a 街和 b 街相交于交叉点 C 或者有公共的终点站 C ;
- iii a 街和 b 街不重合,不相交,并且也没有公共的终点站.

在第一种情况下,可从 A 直达 B ,显然不必换车.在第二种情况下,可以这

样走:从交叉点 A 沿 a 街乘电车到车站 C , 然后改乘沿 b 街行驶的电车到交叉点 B .

假设发生第三种情况,那么,从含有 a 街和 b 街的电车终点站的街道中,可选出两条相交的街道(多边形是凸边的),其中至少有一条街道是有电车线路的.于是该线路与沿 a 街行驶的线路有公共的终点站 A_1 ,而与沿 b 街行驶的线路有公共的终点站 B_1 .所以从 A 到 B 可以这样走,如图 1 所示(箭头表示从 A 到 B 经两次换车.行驶电车的街道,用虚线表示,多边形的边和不通行电车的街道,用实线表示).沿 a 街行驶的电车可驶到 A_1 ,然后换乘电车从 A_1 到 B_1 .在终点站 B_1 改乘沿 b 街行驶的电车到交叉点 B .

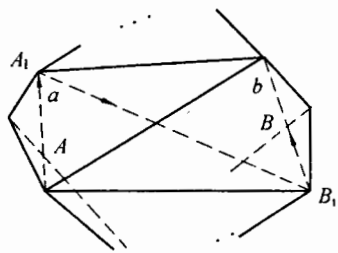


图 1

注 上述推证表明: A, B 为交叉点,从 A 乘车到 B 需要两次换车时,可选择这样的线路,在这线路中必须在终点站换车.如果不准在线路的终点站换车,那么情形 ii 的结论将不成立.例如,除了从某一顶点出发的街道外,该城其余所有的街道都有线路,便是这种情况.因为,这时从 A 乘车到 B ,非在终点站换车不可(见图 2).

