# ❖王国之路

某王国有 16 个城市. 国王希望规划一个道路系统,使得任两城市间的道路互通所经过的中间城市不超过一个. 还规定以每个城市为端点的路不超过 5 条.

(1) 试证:所述要求可实现;

(2) 试证:如果将数 5 换成 4,那么所述要求不能实现.

**解** (1) 图 1 是实现所述要求的设计方案示意图.

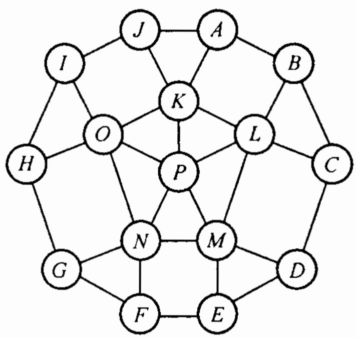



图 1

为了不让太多的线路搅乱视线,在图中未画出以下 10 条道路

$A\leftrightarrow E, B\leftrightarrow F, C\leftrightarrow G, A\leftrightarrow G, B\leftrightarrow H, C\leftrightarrow I, D\leftrightarrow H, E\leftrightarrow I, F\leftrightarrow J, D\leftrightarrow J$

鉴于对称性,只需按以下三种情形分别验证即可.

$$P \rightarrow \begin{cases} K \rightarrow A, J \\ L \rightarrow B, C \\ M \rightarrow D, E \\ N \rightarrow F, G \\ O \rightarrow H, I \end{cases} \qquad K \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow E, G \\ J \rightarrow D, F \\ L \rightarrow B, C \\ O \rightarrow H, I \\ P \rightarrow M, N \end{cases} \qquad A \rightarrow \begin{cases} B \rightarrow C, L \\ E \rightarrow F\text{、}M \\ G \rightarrow H, N \\ J \rightarrow D, I \\ K \rightarrow O, P \end{cases}$$

(2) 假设每个城市最多引出 4 条道路,并且任两城市可经过不多于一个中间城市的道路互通. 首先观察图 2,如果某个城市引出的道路不多于 3 条,那么从该城市出发,能按规定道路到达的城市,至多有 12 个. 因此,从每一个城市引出的道路都有 4 条.

然后观察图 3. 如果某城市引出的道路有 4 条,并且该城市是某个道路三角

形的顶点，那么从该城市出发能按规定到达的城市最多有 14 个. 接着观察图 4. 我们看到，如果不存在三角形道路或四边形道路，那么至少有 17 个城市. 图 5 告诉我们，如果某城市是两个道路四边形的顶点，那么总共至多有 15 个城市. 因此，满足要求的道路网没有任何道路三角形，并且每个城市恰为一个道路四边形的顶点.

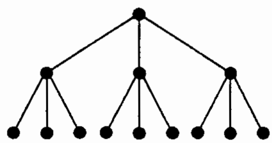


图 2

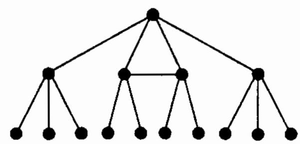


图 3

设道路网中两两无公共点四边形为 $A_jB_jC_jD_j$，$1 \leqslant j \leqslant 4$. 城市 $A_1$ 除了所在道路四边形的两条道路以外，另外还有两条道路引出，其中无一条通往 $C_1$（否则将形成道路三角形）. 这两条路也不能都通往第 $k$ 个四边形（$2 \leqslant k \leqslant 4$），否则会出现道路三角形或者

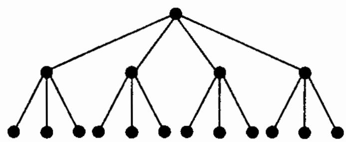
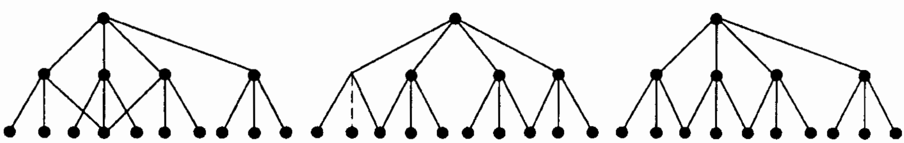


图 4



(a) (b) (c)

图 5

第 5 个道路四边形（使得某些点是两个道路四边形的顶点）. 不妨设从 $A_1$ 引出的另两条路当中，第一条通往 $A_2$，第二条通往 $A_3$. 我们用 (2,3) 给 $A_1$ 标号，表示有一条道路通向第 2 个道路四边形，另有一条道路通向第 3 个道路四边形. 因为 $A_1$ 必须能经过至多一个中间城市到第 4 个道路四边形中的城市，所以 $A_2$ 和 $A_3$ 各有一条道路通往第 4 个道路四边形的两个城市. 从 $B_1$ 和 $D_1$ 也各有一条道路通向第 4 个道路四边形的另外两个城市. 不妨设 $B_1$ 的标号为 (2,4)，$D_1$ 的标号为 (3,4).

请注意，$B_1$ 与 $D_1$ 的标号不同，并且都与 $A_1$ 的标号不同. 由于对称性，三城市 $A_1$，$B_1$，$C_1$ 的标号也各不相同. 于是，$C_1$ 的标号只能是 (3,4). 但这样 $C_1$ 和 $D_1$ 就会有同样的标号. 矛盾！