

❖ 地铁平面图

Martian 地铁平面图表示为平面上一条封闭曲线,这条曲线可以自交,但是在每一点至多自交一次.求证:可以在每一个道路交叉点沿一条道路建一个上面的通道,沿另一条建一个下面的通道,使得火车沿封闭曲线运行时总能交替地从上面和下面的通道通过各个道路交叉点.

证明 Martian 地铁图中的封闭曲线将全平面分成许多个连通部分(通常称为区域),其中仅有一个是无界的.按下述法则将这些区域分成两部分,分别称为 U 区域和 R 区域:

(1) 无界区域为 R 区域;

(2) 若两个区域相邻,即有一段曲线作为它们的公共边界,则它们应分别在不同的区域.由于 Martian 图中曲线的每一交叉点都是十字交叉点,从而按上述规则,每一个区域都可惟一确定其是 U 区域还是 R 区域,如图 1.带阴影的是 U 区域,不带阴影的是 R 区域.

对于每一个道路交叉点,若火车沿一条路趋向该点时, R 区域在火车的左侧,则沿这条路建上面的通道通过该点.如图 2 所示.

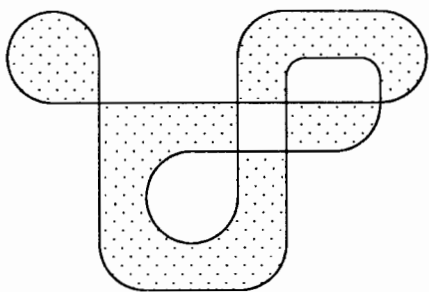


图 1

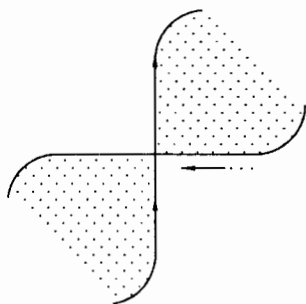


图 2

在这种情况下,沿另一条路趋向该点时, R 区域必在右侧,从而建下面的通道通过该点.

若一列火车通过一个道路交叉点时, R 区域在其左(右)侧,则通过该交叉点后继续向前运行时, R 区域必在其右(左)侧.由此可知按这种方案修建每一个交叉点的上下通道,就能保证火车运行时,交替地从上面和下面的通道通过道路的每个交叉点.