❖多米诺覆盖

用 n 个 2×1 的矩形(这种矩形我们以后称它为骨牌或多米诺)覆盖 $2\times n$ 的棋盘,有多少种不同的盖法?

解 设有 f_n 种不同的盖法. 如果 $n=1$,显然只有一种盖法,即 $f_1=1$. 当 $n=2$ 时,有两种盖法(图 1),即 $f_2=2$.

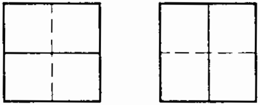

图 1

对于 $n>2$. 我们注意全体覆盖可以分成两类. 第一类是在最右边竖放一张骨牌,第二类是在最右边横放两张骨牌(图 2).

每个第一类覆盖,实际上是用 $n-1$ 张骨牌来覆盖 $2\times(n-1)$ 的棋盘. 所以,第一类覆盖有 f_{n-1} 种.

每个第二类覆盖,实际上是用 $n-2$ 张骨牌来覆盖 $2\times(n-2)$ 的棋盘. 所以,第二类覆盖有 f_{n-2} 种.

于是,我们得到

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \qquad ①$$

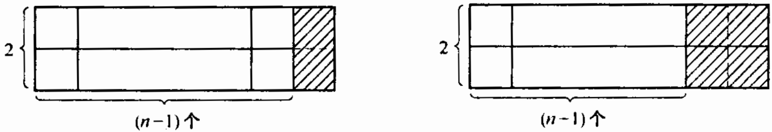

图 2

由 $f_1 = 1, f_2 = 2$ 及递推关系 ① 可逐步推出

$$f_3 = f_1 + f_2 = 3$$
$$f_4 = f_2 + f_3 = 5$$
$$f_5 = f_3 + f_4 = 8$$
$$\vdots$$

从而得到一串数

$$1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots \qquad ②$$

这串数通常称为斐波那契(Fibonacci,1175 ~ 1250,意大利数学家)数.

从递推关系式 ① 及"初始条件"$f_1 = 1, f_2 = 2$ 可以导出第 n 个斐波那契数

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$