

✦ 航空公司

某国有 21 个城市. 有若干个航空公司在其间开辟航班, 每个公司都只在 5 个城市间对开直达的航线(允许不同公司的飞机同时飞行于两城市之间). 每两个城市间至少都有一条直达的航线, 问至少要有多少个航空公司, 才能达到上述要求?

解 要使 21 个城市间至少都有一条直达的航线, 则航线总数不少于

$$20 + 19 + \cdots + 3 + 2 + 1 = 210$$

而每个航空公司只能经营 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 条直达航线. 因此, 至少要 21 个航空公司.

如图 1, 将 21 个城市表示为正 21 边形的顶点, 而每条直达航线就相当于它的边和对角线.

试举一个航线布局的例子: 第一个航空公司经营联系第 1, 3, 8, 9, 12 号城市的航线. 其余的城市间的航线, 可将图 1 中的网格绕正多边形的中心转过 $k \cdot 360^\circ / 21$ 的角度 ($k = 1, 2, \dots, 20$) 而得到. 我们注意到, 连结 1, 3, 8, 9, 12 号顶点的线段中, 8 ~ 9, 1 ~ 3, 9 ~ 12, 8 ~ 12, 3 ~ 8, 3 ~ 9, 1 ~ 8, 1 ~ 9, 3 ~ 12, 1 ~ 12 的长度, 恰好是正 21 边形的边及其对角线的一切可能的长度.

这样一来, 图 1 中网格顺次转过 20 次后, 恰好布满了正 21 边形的所有边和对角线. 这意味着 21 个航空公司按照上述设置的航线, 就能满足题设要求.

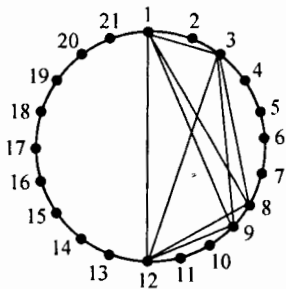


图 1