

❖ 灯光闪亮

在一数轴的每个整点处均安装一个带有按钮开关的灯,每按一次开关,点亮的灯关闭,不亮的灯点亮.现选取一条有有限个小孔的模板,这些小孔位于一直线且小孔间的距离均为整数.我们可进行这样的操作 P :模板可沿数轴作任意刚体移动,但要使其小孔中心位于数轴的整点处.当模板在任一固定位置时,可以同时按下所有小孔所对的整点处的灯的开关.证明:在初始状态灯都不亮时,对任意选定的模板,一定可通过若干次这样的操作 P ,使得恰有两盏灯是亮的.

证明 如果模板上只有一个小孔,则结论显然成立.所以,可假定小孔的个数 $n > 1$.我们用较为代数化的语言来叙述这个问题.把亮的灯看做是在其所在的整点处标上“1”,不亮的灯标上“0”.同样,在模板的小孔处标上“1”,在离小孔距离为整数的点处标上“0”.这样,全体灯的一种状态就是对数轴的整点标以“0”,“1”的一个图形,每一次操作 P 将使小孔所对的整点处所标的“0”或“1”变为“1”或“0”,从而得到一个新图形.所以,我们的问题就是:从全由“0”组成的图形出发,通过若干次操作 P 一定可得到仅由两个“1”组成的图形.下面来给出这样的操作的算法.

首先,将模板在任意取定的一个位置对全由“0”组成的图形做操作 P .如果得到了仅由两个“1”组成的图形,则算法结束.如果不是这样的图形,则做以下

的运算 A :将这模板往右移动,移到使这模板上的第一个“1”(从左开始)对应到所得图形的第二个“1”的位置,并做操作 P .若还得不到所要的图形,则继续做这样的运算 A .在做每一次运算 A 后,我们总是得到这样形式的图形:在这个图形的第一个“1”(从左开始)后面有若干个“0”,接着是有 $n-1$ 个“0”和“1”,且其中最后一个必是“1”.我们把这最后 $n-1$ 个“0”和“1”组成的数列称为是该图形的结尾数列.因为我们可以作任意多次这样的运算 A ,所以一定能得到两个有相同结尾数列的不同的图形(为什么?请读者思考),把先后得到的这样的两个图形记作 C_1 和 C_2 .

对每个这样得到的图形,一步步反推回去就返回到全由“0”组成的图形.所谓“一步步反推回去”就是依次作这样的运算 B (它可看做是运算 A 的逆运算):将模板最右边的“1”对应到图形最右边的“1”,并做操作 P .设图形 C_1 做 m 次运算 B 后,返回到全由“0”组成的图形.由于图形 C_2 的第一个“1”和它的结尾数列之间的“0”的个数一定多于图形 C_1 的第一个“1”和它的结尾数列之间的“0”的个数,所以,对图形 C_2 做 m 次运算 B 后,就得到仅由两个“1”组成的图形(为什么?请读者思考).