❖扇形放棋子

给定圆被分成 n 个扇形. 某些扇形里放置了棋子, 所放棋子的总数等于 $n+1$. 每次变换让两个在同一扇形内的棋子朝相反方向分别进入两侧相邻的扇形. 试证:经若干次这样的变换后,必定出现至少半数扇形有棋子占据的情形.

证法1 设若干次变换之后,不再有可能继续作变换. 则此时每一扇形内至多只有一枚棋子,但这与棋子总数等于 $n+1$ 相矛盾. 因此,变换总能无限次进行下去,如果某一时刻,在某一对相邻扇形中至少有一枚棋子,那么变换以后依然如此. 如果某一时刻,所有各对相邻的扇形每对都至少含有一枚棋子,那么当然至少有一半扇形被棋子占据. 现在作相反的假设,证明其不可能. 假定如上所述的情形永远不出现,则根据前面的说明,存在某一对相邻扇形(X,Y),经无穷多次变换该对扇形永远不被占据. 给扇形依次编号,不妨将 X 编号为 1,将 Y 编号为 n. 约定以 a_{jk} 表示第 j 枚棋子在第 k 次变换后所在扇形的编号数. 按照所作的假设

$$2 \leqslant a_{jk} \leqslant n-1, j=1,\cdots,n+1, k=1,2,\cdots$$

考察数列

$$f_k=\sum_{j=1}^{n+1} a_{jk}^2, k=1,2,3,\cdots$$

这数列是递增的. 如果第 $k+1$ 次变换将第 m 号扇形内的两枚棋子朝相反方向移到两个相邻扇形中去,那么

$$f_{k+1}=\sum_{j=1}^{n+1} a_{jk}^2-2m^2+(m-1)^2+(m+1)^2=f_k+1$$

因为能无限次进行变换,所以上述数列将无限增大,但这是不可能的. 因为

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{jk}^2 \leqslant (n+1)(n-1), k = 1,2,3,\cdots$$

这一矛盾证明了题目的结论.

证法 2 如果相邻的两扇形都无棋子,那么就称两扇形的公共边界是"孤立的".为了证明题目的结论,我们将用到以下三项事实:

(1) 变换总是可进行的(因为至少有一个扇形含有两枚棋子).

(2) 变换不会将非孤立边界变成孤立的边界(显然).

(3) 变换一次次进行下去,每条边界都将在某时刻被棋子越过(证明见后).

上面陈述的事实(1) 保证变换可永远进行下去.事实(3) 指出,在一系列变换中,每条边界都在某一时刻变成非孤立的.事实(2) 指出,某边界一旦成为非孤立的,它将永远是非孤立的.综合三项事实,可以断定:某时刻之后,所有的边界都将永远是非孤立的.因而,至少有一半扇形被棋子占据.为了证明事实(3),我们考察任意指定的一条边界 B.从 B 出发绕圆心一周,依次将每个扇形内的棋子数写下.将这些数从右向左排列,可视为一个有 n 位数字的$(n+2)$进位数 X(请注意,一个扇形内所放的棋子数不超过 $n+1$).现在进行一次变换,则有以下两情形之一出现:

i X 严格增加;

ii 某一棋子越过边界 B(导致从 X 的首位取 1 移到末位去).

因为不超过 n 位的$(n+2)$进位数最大也只有$(n+2)^n-1$,所以情形 i 不可能无限次地出现.因而在一系列变换之后,必有棋子越过界线 B.