❖西班牙棋盘和标号问题

考虑 $h+1$ 个棋盘,将每个棋盘的方格标上 1 至 64,使得任两个棋盘的周界在以任一种方式重叠时,没有两个在同样位置的方格有相同的数,问 h 的最大值是多少?

解 如果有 17 个棋盘,考虑每块棋盘的 4 个角上的数所成的四元集,由于每个四元集都是集

$$M=\{1,2,3,\cdots,64\}$$

的子集,所以 17 个四元集中必有两个集有公共元,相应的两个棋盘可以叠合起来,使得一个角上的数相同,因此 $h\leqslant 15$.

另一方面,设第一个棋盘的方格已按图 1 填好.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

图 1

考虑 16 个四元组:

$$\begin{array}{ll}
(1,\ 8,64,57), & (11,23,54,42)\\
(2,16,63,49), & (12,31,53,34)\\
(3,24,62,41), & (13,39,52,26)\\
(4,32,61,33), & (14,47,51,18)\\
(5,40,60,25), & (19,22,46,43)\\
(6,48,59,17), & (20,30,45,35)\\
(7,56,58,9), & (21,38,44,27)\\
(10,15,55,50), & (28,29,36,37)
\end{array}$$

(经过旋转,每一组中的数变为同一组中的数).

将图 1 中的第 k 组数换成第 $k+1$ 组($k=1,2,\cdots,8$. 第 9 组即第 1 组),便

产生1个新棋盘，再将新棋盘上第k组数换成第$k+1$组，又产生1个新棋盘，这样继续下去，共得16个棋盘.

这16个棋盘无论如何重合，只要不把棋盘翻过来放在另一个棋盘上，相同位置上的两个方格都没有相同的编号(因为上述16组中，任意两组没有公共元)，所以$h=15$.

如果允许将棋盘翻过来进行叠合，那么$h=7$.

一方面，考虑图1中2,7,16,56,63,58,49,9所占的8个方格，这8个方格中的数组成一个八元集，六十四元集M至多有8个互不相交的八元子集.因此，对于9个棋盘，必有2个八元子集有公共元，相应的两个棋盘可以叠合在一起(包括将一个棋盘翻过来)，使同一位置上有相同的数，所以$h\leqslant 7$.

另一方面，将上述16个组中，第1组与第16组，第2组与第7组，第3组与第6组，第4组与第5组，第8组与第13组，第9组与第12组，第10组与第11组，第14组与第15组，两两合并成8组，仿照前面的做法，可以得出8个棋盘满足要求，因此$h=7$.