

❖ 直达航班

某国的城市多于 101 个. 这个国家的首都与其他 100 个城市有直达航班, 首都之外的每个城市都与 10 个城市有直达航班. 已知从这个国家的任一城市可乘飞机到达任一另外的城市 (未必是直达航班, 中途可能在其他某些城市停留). 求证: 可以关掉与首都相连的一半直达航班, 使得仍然可以从这个国家的任一城市乘飞机到达任一另外的城市.

证明 构造一个图 G , 使得该图的每一个顶点表示一个城市, 表示两个有直达航班的城市的点之间有一条边. 记 M 表示的城市是首都, 从 G 中去掉顶点 M 和所有与 M 相连的边所得的图记为 G' . 假设 G 是一个连通图, 显然 G' 可以分解为若干连通分支. 由 G 的连通性可知 G' 的每一个连通分支中至少有一个顶点在 G 中与 M 有边相连. 由假设可知在 G 中与 M 有边相连的顶点在 G' 中的度数为 9. 在 G 中与 M 无边相连的顶点在 G' 中的度数为 10. 由于任一图中的顶点度数之和为偶数, 所以在 G' 的每一个连通分支中至少有两个顶点在 G 中与 M 有边相连. 由于在 G 中 M 的度数为 100, 从而 G' 的连通分支至多有 50 个. 于是 G' 加上顶点 M , 再加上 G' 的每一个连通分支中一条原来在 G 中与 M 连的边就构成一个连通图, 即要证的结论成立.