❖淘汰制体育比赛

在实行淘汰制的比赛里，如果除了 5 个选手以外，其他选手都退出了比赛，那么，我们可以加进 3 个空额，使得总数仍然是 8 个，设抽签以后 3 个空额都在秩序表末尾（即抽了 6,7,8 号）.

问在选手中，能力是第二位的运动员，取得第二名的概率有多大?

解　(1) 如果抽签用淘汰制，那么为使第二名确由选手中能力次强的选手获得，两个最强选手之一应抽第 5 号，这个事件的概率等于下列事件的概率之和.

ⅰ 两个最强选手中第一个抽签的人抽第 5 号;

ⅱ 两个最强选手中第一个抽 1,2,3 或 4 号，而第二个人抽第 5 号.

第一个事件的概率等于 $1/5$，第二个事件的概率为 $4/5 \times 1/4 = 1/5$，因而，所求的概率等于 $2/5$.

(2) 不过，安排空额的最正确的方法应该是另一种，例如，这样安排：抽签后在第四、六、八位，这时，第一轮比赛仅成为两个选手（第 1 号和第 2 号）的一次比赛，在第二轮有两次比赛，第三轮有一次，这样，每个决赛参加者得以至少

与一个选手较量.如果在抽签以后空额在秩序表的末尾,那么会出现这样的情况:最弱的选手在一、二轮轮空而一下子就进入决赛,不难计算,抽签后空额出现在第四、六、八位时,实力是第二位的运动员得到第二名的概率等于3/5,5个选手排列在5个位子(第1,2,3,5,7号)有5!种方法,下列抽签的结果可以认为是好的.

ⅰ 最强的选手抽了第1,2,3号,次强的抽了5或7号;

ⅱ 最强的在第5号或7号,次强的在1,2或3号.

在这两种情况里,其余的选手可以抽这两个人抽剩的任何号码.因而,好的抽签结果的总数等于$3\cdot2\cdot3!+2\cdot3\cdot3!$,所求的概率等于

$$\frac{3\cdot2\cdot3!+2\cdot3\cdot3!}{5!}=\frac{3}{5}$$

(3) 假使空额与选手一样参加抽签,则所求的概率为4/7.

(4) 我们再考虑一种抽签方法,先抽一次签确定第一轮比赛的各对选手(抽签规定5个选手的次序,并添写3个空额;在第一轮里1与2比赛,3与4比赛,5号轮空),然后,仍通过抽签在第一轮的获胜者中确定第二轮比赛的各对,能力次强的选手B进入第二轮的概率,正是他在第一轮不与最强选手A比赛的概率,这发生在下列情形:

ⅰ A抽1或2号,B抽3,4或5号;

ⅱ A抽3或4号,B抽1,2或5号;

ⅲ A抽5号,B抽1,2,3或4号.

1～5号选手的全排列等于5!,而对应于ⅰ,ⅱ,ⅲ的抽签的好结果,分别有$2\cdot3\cdot3!$,$2\cdot3\cdot3!$和$1\cdot4\cdot3!$种(在这三种情形里,其他选手的分布都是随意的),因而,B是第一轮比赛优胜者之一的概率是

$$\frac{2\cdot3\cdot3!+2\cdot3\cdot3!+1\cdot4\cdot3!}{5!}=\frac{4}{5}$$

如果B在第一轮获胜,则在第二轮里有两个最强的选手A,B,一个较弱的选手以及一个空额,随着抽签的不同结果,B或者与较弱的选手比赛,或者与A相遇,或者轮空,这三种情形里,有两种情形B能进入决赛而得到第二名,因而,如果B已在第一轮获胜,那么他在第二轮获胜的概率是2/3,这样,B成为第二名的概率是$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$,这是本题的又一种解答.