❖爱丽丝的游戏

爱丽丝有两只袋子，每只装 4 个球，每个球上写一个自然数. 她从每只袋中随机地抽出一个球，记下两个球所标数的和，然后将球放回各自的袋中. 这样重

复多次.比尔在观察这些记录时发现,每两个球所标数的和发生的频率与从1至4中随机抽出的两个数(允许重复)构成同样的和的频率恰好相同.由此,对球上标的数能得出怎样的结论?

解 一种显然的可能是每只袋中含的数都是1,2,3,4.我们要找出其他的情况.

设一只袋中的数为 a_1,a_2,a_3,a_4,另一只袋中的数为 b_1,b_2,b_3,b_4.则和 s 出现的概率与多项式

$$(x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}+x^{a_4})(x^{b_1}+x^{b_2}+x^{b_3}+x^{b_4})$$

中 x^s 项的系数成正比.

根据题意,上述多项式恒等于

$$(x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+x^3+x^4)=x^2(x+1)^2(x^2+1)^2$$

因为 a_i,b_i 都是自然数,所以

$$x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}+x^{a_4}=x(x+1)^{\gamma}(x^2+1)^{\delta} \quad ①$$

$$x^{b_1}+x^{b_2}+x^{b_3}+x^{b_4}=x(x+1)^{2-\gamma}(x^2+1)^{2-\delta} \quad ②$$

其中,$\gamma,\delta\in\{0,1,2\}$.

在①中令 $x=1$ 得 $4=2^{\gamma+\delta}$,即 $\gamma+\delta=2$,将 γ,δ 的所有可能值代入①,②得

$$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{1,3,3,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,2,3\}$$

$$\{b_1,b_2,b_3,b_4\}=\{1,2,2,3\},\{1,2,3,4\},\{1,3,3,5\}$$

因此除了开头所说的情况外,还有另一种可能:一只袋中的数为1,3,3,5,另一袋中的数为1,2,2,3.