

❖ 无法操作

对圆周上已有的红点和蓝点可进行如下操作:或者加上一个红点,同时改变它的相邻两点的颜色(即红变蓝,蓝变红);或者去掉一个红点,同时改变其原来相邻两点的颜色.设开始时圆周上仅有两个红点.求证:经任意有限次上述操作,不可能出现圆周上仅有两个蓝点的状态.

证明 设 S 是该圆周满足下列条件之一的红点和蓝点分布状态集合:

- (1) 全是其个数不被 3 整除的红点;
- (2) 有偶数个蓝点.两个相邻蓝点之间的红点(可能是空集)称为一个链,其个数(可能是 0)称为该链的长度,从某一个链开始依顺时针依次将每个链标上“+”或者“-”.记标以“+”的链的长度和为 n ,标以“-”的链的长度和为 m ,则 $n - m$ 不被 3 整除(注意在(2)中,初始链的选取和顺时针与逆时针顺序的选取只影响 $n - m$ 的符号).

不难验证 S 中的一个状态经题中所说的操作所产生的状态仍在 S 中.因为初始状态在 S 中,所以无论经多少次操作,所产生的状态都在 S 中.由于仅有两个蓝点的状态不在 S 中,从而经任意有限次操作,不可能从仅有两个红点的状态产生仅有两个蓝点的状态.

注 不难证明: S 中的任一状态均可以从仅有两个红点的初始状态经有限次操作产生.进一步,包含偶数个蓝点(可能是 0 个),但不在 S 中的状态都可以从仅有两个蓝点的初始状态经有限次操作产生.所有包含奇数个蓝点的状态可从仅有两个蓝点的初始状态经有限次操作产生.