❖涂涂抹抹

两个人轮流在 8 × 8 的方格板上玩涂格子游戏. 第一个人每次将其中任意两个相邻的格涂上黑色, 而第二个人将其中任意一格涂上白色. 起初方格板上所有的格都是白色的. 第二个人能否在他的每次涂色之后, 使得板上任意一个 5 × 5 格正方形中:

(1) 至少有一个角的格涂成白色;

(2) 至少有两个角的格涂成白色.

(有公共边的两格叫做相邻的; 同一格子可经两游戏者改涂颜色若干次)

解 (1) 对任意的 5 × 5 格正方形, 图 1 中有 × 号的格中至少有一个是它的角格. 第二个人总能将它涂成白色的. 因为第一个人每次至多只能将图 1 中的一个有 × 号的格涂成黑色的. 所以对任意 5 × 5 格正方形, 至少有一个角的格涂成白色, 是可以做到的.

		×			×		
×			×			×	
	×			×			×
		×			×		
×			×			×	
	×			×			×
		×			×		
×			×			×	

图 1

(2) 若一个方格是某个 5 × 5 格正方形的角格, 则它不能是另一个 5 × 5 格正方形的角格. 所有这样的正方形只有 16 个, 所以第二个人要实现(2) 中的题设要求, 必须在他涂色之后, 板上至少要有 32 格是涂白色的. 第一个人在前 32 次中, 只要对每格不重复涂色, 那么他将把 64 格都涂成黑色的. 而第二个人在前 32 次中, 充其量只能将 32 格涂成白色. 如果这时板上出现两个相邻的白格, 第一个在第 33 次又可将它们涂成黑色, 第二个人在第 33 次也只能将其中一个黑格涂成白色. 至此, 板上的白格已不超过 31 个, 这样就达不到题设的要求. 若经前述 32 次涂色后, 板上不出现相邻的白格, 那么这时就像国际象棋棋盘那样黑白相间. 这时, 某些 5 × 5 正方形的角格都是黑色的, 更谈不上有两个角的格是白色的. 所以对任意 5 × 5 格正方形, 至少有两个角的格涂成白色是做不到的.