❖平分巧克力

n 名儿童希望将 m 块相同的巧克力糖分成份量相等的 n 堆.规定每块巧克力糖至多能被分成两部分.

(1) 如果 $m=9$,那么对怎样的 n,所述要求能实现?

(2) 更一般地,对怎样的 n 和 m,所述要求能实现?

解　问题(1)是问题(2)的特殊情形．所以只需对问题(2)作出解答．首先指出：如果 $m \geqslant n$，那么总能实现要求．对此情形，每一等份的量不少于一整块巧克力．首先让第一位儿童取一等份，为此至多需要将一块巧克力切开(分成两部分)．接着让第二位儿童取一等份．如果上一位曾切开某块巧克力，那么第二位从他剩下那一部分开始．必要时第二位儿童也要切开一块巧克力．这样的过程可以继续下去，直到每位儿童都取到自己的那一等份．

现在，假定 $m < n$，并且题目所述的要求能够实现．对此情形，每一等份都少于一整块巧克力．因此所有的巧克力糖都必须切开．我们构造一个有 n 个顶点的图．每个顶点代表一位儿童，每条边代表一块巧克力糖(总共 m 条边)．某条边所连的两个顶点就是分取该块巧克力的两位儿童．假定该图有 k 个连通分支，各分支的顶点数和边数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 和 $m_1, m_2, \cdots, m_k$．因为所有儿童分到同样多的巧克力糖，所以

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \cdots = \frac{m_k}{n_k} = \frac{m}{n} < 1$$

因为每个连通分支是顶点数多于边数的连通图，所以必有 $m_j = n_j - 1, j = 1, 2, \cdots, k$．于是

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = \frac{n}{k}, m_1 = m_2 = \cdots = m_k = \frac{m}{k}$$

因此，为实现题目所述的要求，一个必要条件是存在 m 和 n 的公约数 k，使得 $\frac{m}{k} = \frac{n}{k-1}$．当然，$k$ 必定是 m 和 n 的最大公约数．

下面说明上述条件也是充分的．首先考察 $m = n - 1$ 情形．因为每一等份是一块巧克力糖的 $\frac{n-1}{n}$ 倍，所以只需每块切下 $\frac{1}{n}$ 部分．前 $n-1$ 位儿童每位取走 $\frac{n-1}{n}$ 块巧克力之后，最后一位儿童取走每块剩下的部分，他所获得的巧克力也有 $(n-1) \times \frac{1}{n}$ 块．对于 $k > 1$ 的情形，基本条件是 $\frac{m}{k} = \frac{n}{k} - 1$．于是 $m = n - k, \frac{m}{n} = 1 - \frac{k}{n}$．先让前 m 位儿童各将一块巧克力糖切开取走 $\frac{n-k}{n}$ 块，留下 $\frac{k}{n}$ 块．然后让后面的 k 位儿童每位取走 $\frac{m}{k}$ 块切剩下的部分(每块剩下的部分为 $\frac{k}{n}$ 块)．后来的这些儿童，每人分得的量也是

$$\frac{m}{k} \times \frac{k}{n} = \frac{m}{n}$$

对于(1)中的情形，$m = 9$．因此 n 的可能取值为

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,\begin{cases}10, k = 1\\12, k = 3\\18, k = 9\end{cases}$$