

## ❖ 签名游戏

已知凸多面体  $k$  的面数  $n \geq 5$ , 其中每个顶点恰好都引出三条棱. 两个人做下面的游戏: 两人交替地在没有被签上名的面上签名, 以先在具有公共顶点的三个面上签上名者为胜. 证明: 在任何情况下, 都是先开始签名的人获胜.

**证明** 首先证明这个凸多面体至少有一个面的边数大于等于 4. 不然的话, 每一面均为三角形, 从而  $3n = 2E$  (其中  $E$  为多面体的棱数), 但由欧拉公式  $V + n - E = 2$  (其中  $V$  为多面体的顶点数), 又由于每一个顶点恰好引出三条棱, 所以  $3V = 2E$ . 由这三等式消去  $V, E$  得  $n = 4$ , 这与已知  $n \geq 5$  矛盾.

第一个人先在边数大于等于 4 的这个面  $S_1$  上签名, 然后在与面  $S_1$  相邻的面  $S_2, S_3, \dots, S_k$  ( $k \geq 5$ ) 中选择一个面签名. 选择的方法是这样的 (图 1): 如果第二个人未能在  $S_2, \dots, S_k$  上签名, 则可在  $S_2, \dots, S_k$  中任取一个; 如果第二人在  $S_2, \dots, S_k$  中某一个上签名, 不妨设为在  $S_2$  上签名, 那么  $S_3, \dots, S_k$  中必有与  $S_2$  不相邻者, 第一个人就在这种面中的一个上签名. 设第一个人在  $S_4$  上签了第二次名, 那么他一定可以在与  $S_4$  相邻的面  $S_3, S_5$  中的一个上再签一次名, 从而取得了胜利.

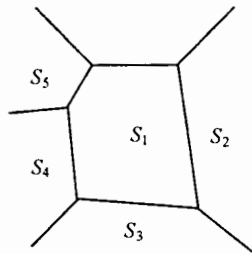


图 1