

❖ 巧剪纸条

在一长条纸上依次写上 60 个字母, 它们或者是 X , 或者是 O . 将这一长条纸剪成许多小长条, 使得每一个小长条上的字母关于其中心是对称的. 例如 O , XX , $OXXXXO$, XOX 等等.

- (1) 求证: 有一种剪法, 使得至多有 24 个小长条;
- (2) 给出一个在长条纸上字母 X 或 O 排列的例子, 使得按上述规则无论如何剪, 所得的小长条不能少于 15 个;
- (3) 试改进(2) 中的结果.

解 (1) 将 60 个字母的序列剪成 12 个子序列, 使得子序列恰为 5 个连续的字母, 凭经验不难发现每一个子序列总可以剪成一个或者两个合乎题目要求的小长条, 即上面的字母关于中心对称. 事实上, 不妨设所取的子序列第一个字母为 X , 则仅有以下 16 种情况:

XXXXX	(XOX)XX
(XXXX)O	X(OXXO)
XX(XOX)	XOXOX
(XXX)OO	(XOX)OO
XXOXX	(XOOX)O
XX(OXO)	(XOOX)X
X(XOOX)	XOOOX
(XX)OOO	X(OOOO)

上述有4种情况为5个字母关于其中心对称,其余12种情况括号内与外的字母均关于其中心对称.由此可看出用这种方法去剪,无论开始时60个字母如何写,所得小长条总不超过24个.

(2) 考虑如下以6为周期的字母序列:

$$XXOOXOXYOOXOXXOOXO \quad \textcircled{1}$$

不难证明式①中连续5个或多于5个字母所成的子序列关于其中心必不对称,从而按题目要求剪含有式①中前60个字母的长条纸,所得的小长条不可能少于15个.

(3) 设长条纸上写有式①中的前60个字母,按题目要求将它剪成若干小长条.称小长条上含有字母的个数为其长度.可以证明所有小长条长度的平均数不大于3.事实上,只需讨论长度为4的小长条XOOX和OXXO,有以下两种情形:

i 长度为4的小长条后接着一个长度为1的小长条,这两个长条的平均长度为2.5;

ii 长度为4的小长条后接着的小长条的长度大于1,从式①可以看出只有以下两种情况:

$$(OXXO)(OXO), (XOOX)(OXXO)$$

对于第一种情况,若后面还有字母,则必有小长条(X)或(XX).所以这3个小长条的平均长度不大于3.对于第二种情况,不妨设后面跟着的小长条为(OXO),若其后还有字母,则可能出现的情况为

$$\begin{aligned} &(XOOX)(OXXO)(OXO)(X) \\ &(XOOX)(OXXO)(OXO)(XX)(O) \\ &(XOOX)(OXXO)(OXO)(XX)(OO) \end{aligned}$$

上述情况所得的小长条平均长度均不大于3.有可能出现问题的是最后为(OXXO)(OXO)或者(XOOX)(OXXO)(OXO).由于在最后的只能有一组,注意到整个序列最前面的小长条必为(X),...或者(XX),(OO),...或者(XX),

(0), … 最前面的一个或者两个和最后面的合起来平均长度不大于 3, 于是小长条不少于 20 个. 下面给出一个剪的方法, 使得小长条恰为 20 个:

$$(X)(XOOX)(OXXO)(OXO)\cdots$$