❖朋友佳音

64 位朋友同时每人得到一条消息，而且任意两人所得消息不同．他们两两用电话相互告诉对方自己所得到的全部消息．设每次电话恰好用一小时，问最少需多少小时才能使每个朋友都知道所有的消息？

解　设有 2^n 个朋友，经 n 轮电话后，每个人至多得到 2^n 条消息．因此，为使每个人都得到所有的消息至少需要 n 个小时．下面我们用归纳法证明 n 个小时就够了．事实上，当 $n=1$ 时，要证的结论显然成立．假设结论对于 $n-1$ 成立，$n\geqslant 2$．考虑 2^n 个朋友的情况．第一轮 2^{n-1} 对通话（用 1 小时）之后，我们将 2^n 个朋友分为两组，每组包括每一对通话交换消息中的一个朋友．这样每组有 2^{n-1} 个朋友，他们知道原来 2^n 个朋友得到的所有消息．归纳假设再经 $n-1$ 轮通

话，就可使得每个人知道所有的消息．因此结论对于 n 也成立，这就完成了归纳论证．特别对 64 个朋友的情况，最少需要 6 小时．

考虑以下情况：

(1) $k = 55$;

(2) $k = 100$.

对于 k 位朋友，设 $f(k)$ 表示所求的最少小时数．

定理 1 若 $k = 2^n$，其中 n 为正整数，则 $f(k) = n$.

证明 设有 $k = 2^n$ 个朋友，经 n 轮电话后每个人至多得到 2^n 条消息．因此为使每个人都得到所有的消息，至少需要 n 个小时．下面我们用归纳法证明 n 个小时就够了．事实上，当 $n = 1$ 时，要证的结论显然成立．假设结论对于 $n - 1$ 成立，$n \geqslant 2$．考虑 2^n 个朋友的情况．第一轮 2^{n-1} 对通话（用 1 小时）之后，我们将 2^n 个朋友分为两组，每组包括每一对通话交换消息中的一个朋友．这样每组有 2^{n-1} 个朋友，他们知道原来 2^n 个朋友得到的所有消息．归纳假设再经 $n - 1$ 轮通话就可使得每个人知道所有的消息．因此结论对于 n 也成立，这就完成了归纳论证．

定理 2 若 $2^n < k < 2^{n+1}$，其中 n 为正整数，且 k 为奇数，则 $f(k) = n + 2$.

证明 经过 n 轮通话，每个人至多得到 2^n 条消息．由于 k 为奇数，在第 $n + 1$ 轮通话中至少有 1 人没有通上话．由此可得 $f(k) \geqslant n + 2$．另一方面，用

$$A(1), A(2), \cdots, A(2^n), B(1), B(2), \cdots, B(k - 2^n)$$

标记 k 位朋友．由于 $k - 2^n < 2^n$，第一轮安排每个 $B(i)$ 与 $A(i)$ 通话，其中 $i = 1, 2, \cdots, k - 2^n$．第一轮之后，$A(1), A(2), \cdots, A(2^n)$ 得到消息的总和为原来 k 位朋友所得的 k 条消息．由定理 1 可知再经 n 轮通话可使 $A(1), A(2), \cdots, A(2^n)$ 中的每位朋友得到所有的消息．最后一轮安排每个 $A(i)$ 与 $B(i)$ 通话，$i = 1, 2, \cdots, k - 2^n$，从而每位朋友都得到所有的消息．综上可得 $f(k) = n + 2$.

定理 3 若 $2^n < k < 2^{n+1}$，其中 n 为正整数，且 k 为偶数，则 $f(k) = n + 1$.

证明 显然 $f(k) \geqslant n + 1$．以下安排一种 $n + 1$ 轮通话的方法，可使每位朋友得到所有的消息．

设 $k = 2m$．把 k 位朋友分为两组，每组 m 位朋友，将这两组朋友分别标记为 $A(1), A(2), \cdots, A(m)$ 和 $B(1), B(2), \cdots, B(m)$．对任意整数 r，若 $r = lm + i$，其中 l 为整数，i 为正整数且 $1 \leqslant i \leqslant m$，则记 $A(r) = A(i)$，$B(r) = B(i)$．对于 $1 \leqslant j \leqslant n$，第 j 轮安排 $A(i)$ 与 $B(i + 2^{j-1} - 1)$ 通话，其中 $i = 1, 2, \cdots, m$.

第 $n+1$ 轮安排 $A(i)$ 与 $B(i)$ 通话，其中 $i=1,2,\cdots,m$. 用 $g(i)$ 表示开始时 $A(i)$ 和 $B(i)$ 所得到的两条消息. 对于 $1\leqslant j\leqslant n$，用归纳法可以断言第 j 轮通话后 $A(i)$ 和 $B(i+2^{j-1}-1)$ 两人都得到

$$g(i),g(i+1),\cdots,g(i+2^{j-1}-1)$$

此处对于 $r=lm+s$，其中 l 为非负整数，s 为正整数，且 $1\leqslant s\leqslant m$，也记 $g(r)=g(s)$. 事实上，当 $j=1$ 时，由于 $A(i)$ 与 $B(i)$ 通话，从而 $A(i)$ 与 $B(i)$ 都得到 $g(i)$. 设断言对于 $j-1$ 成立，其中 $2\leqslant j\leqslant n$，则第 $j-1$ 轮通话后，$A(i)$ 得到

$$g(i),g(i+1),\cdots,g(i+2^{j-2}-1)$$

$A(i+2^{j-2})$ 得到

$$g(i+2^{j-2}),g(i+2^{j-2}+1),\cdots,g(i+2^{j-1}-1)$$

由于在第 $j-1$ 轮中 $A(i+2^{j-2})$ 与 $B(i+2^{j-1}-1)$ 通话，在第 j 轮中 $A(i)$ 与 $B(i+2^{j-1}-1)$ 通话，从而第 j 轮通话后，$A(i)$ 与 $B(i+2^{j-1}-1)$ 都得到

$$g(i),g(i+1),\cdots,g(i+2^{j-1}-1)$$

这就完成了断言的归纳证明.

由断言可知经 n 轮通话后 $A(i)$ 得到

$$g(i),g(i+1),\cdots,g(i+2^{n-1}-1)$$

$A(i-2^{n-1}+1)$ 得到

$$g(i-2^{n-1}+1),g(i-2^{n-1}+2),\cdots,g(i)$$

由于在第 n 轮 $A(i-2^{n-1}+1)$ 与 $B(i)$ 通话，所以第 $n+1$ 轮 $A(i)$ 与 $B(i)$ 通话后他们都得到

$$g(i-2^{n-1}+1),g(i-2^{n-1}+2),\cdots,g(i),g(i+1),\cdots,g(i+2^{n-1}-1)$$

由于 $m=\dfrac{1}{2}k\leqslant 2^n-1$，从而 g 从 $i-2^{n-1}+1$ 到 $i+2^{n-1}-1$ 总共 2^n-1 个连续整数上的取值包含了 k 位朋友开始时得到的所有消息. 由此可得 $f(k)=n+1$.

由上面三个定理可得，$f(64)=6$，$f(55)=7$，$f(100)=7$