❖拳击大赛

设有 16 名拳击手参加一届大赛.每名选手每天出场的次数不多于一次.已知参赛选手的实力强弱各不相同.在比赛中,实力较强者必定战胜实力较弱者.根据大赛章程,每天的比赛日程在前一天傍晚由组织者排出,并且不得更改.试证:可安排十天的比赛以判定所有参赛的 16 名选手的强弱顺序.

证明　首先证明一个预备命题:设有 2^m 名拳击手,他们的情况和赛场规则如题目所述.假定这 2^m 名选手所分成的两组,各组都已排出组中的强弱次序.那么再进行 m 天的比赛就能完全排出这 2^m 名选手的强弱次序.对于 $m = 1$ 的情形,命题的结论显然成立.假定对于 $m = n$ 命题结论成立,考察 $m = n + 1$ 情形.设两组中的排列次序分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_h$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_k$, $h + k = 2^{n+1}$.不妨设 $h \leqslant k$.此后第一天的比赛安排如下:

$$A_i \leftrightarrow B_{2^n - i + 1},\ i = 1, \cdots, h$$

如果第一天的比赛所有的 A_i 都获胜,再安排 $(A_1, \cdots, A_h)$ 与 $(B_1, B_2, \cdots, B_{2^n - h})$ 这两组之间的比赛.因为 $h + (2^n - h) = 2^n$,所以根据归纳假设,只需再进行 n 天比赛,就能获知这些选手之间的排列次序.连同前面的结果,在总共 $n + 1$ 天的比赛之后,完全排出了选手的排列次序.下面,我们假定在此阶段的第一天比赛中,并不是所有的 A 组选手都战胜了对手.

不妨设 j 是未获胜的 A 组选手的第一个顺序号.这就是说,$A_1, \cdots, A_{j-1}$ 都战胜了对手,但 A_j 没有战胜.下面需要分别考察 $(A_1, A_2, \cdots, A_{j-1})$ 与 $(B_1, B_2, \cdots, B_{2^n - j + 1})$ 之间的排列顺序和 $(A_j, A_{j-1}, \cdots, A_h)$ 与 $(B_{2^n - j + 2}, B_{2^n - j + 3}, \cdots, B_k)$ 之间的排列顺序(顺带说明,如果 $j = 1$,那么上面列出的前一部分根本就没有,只需考察后一部分).这里所列出的两部分,每一部分两组选手的数目之和都是 2^n,即

$$(j - 1) + (2^n - j + 1) = 2^n = (h - j + 1) + k - (2^n - j + 1)$$

只需进行 n 天比赛,就可以将每一部分所涉及的选手完全排出次序.至于两部分选手之间的比较,则如前面所述已排出了强弱次序.因此,总共只需安排 $n + 1$ 天比赛,就可完全排出所有选手的强弱次序.至此,我们完成了命题的归纳证明.

本题目中的参赛选手共为 16 名.首先将 16 名选手分成八个 2 人组,用 1 天比赛判定各 2 人组中的强弱次序;其次,将八个 2 人组合成四个 4 人组,又用 2 天

时间判定各组中的强弱次序;然后,再将四个 4 人组合成两个 8 人组,再用 3 天时间判定各组中的强弱次序;最后,将 2 个 8 人组合并在一起考察(共 16 人),再用 4 天时间就可完全确定所有选手的强弱次序.整届比赛总共用去了 $1+2+3+4=10$ 天的时间.这正是题目所要求的.

注 可参看 C.Li 和 A.Liu 的文章“The Coach's Dilemma”.该文刊载于以下杂志:Mathematics and Informatics Quarterly, 2, (1992), pp. 155 ~ 157.

例 设有 32 名拳击手参加一届大赛.每名选手每天出场的次数不多于一次.已知参赛选手的实力强弱各不相同.在比赛中,实力较强者必定战胜实力较弱者.根据大赛章程,每天的比赛日程在前一天傍晚由组织者排出,并且不得更改.试证:可安排十五天的比赛以判定所有参赛的 32 名选手的强弱顺序.

证明 首先证明一个预备命题.设有 2^m 名拳击手,他们的情况和赛场规则如题目所述.假定这 2^m 名选手所分成的两组,各组都已排出组中的强弱次序.那么再进行 m 天的比赛就能完全排出这 2^m 名选手的强弱次序.

对于 $m=1$ 的情形,命题的结论显然成立.假定对于 $m=n$ 命题结论成立,考察 $m=n+1$ 情形.设两组中的排列次序分别为

$$A_1, A_2, \cdots, A_h, B_1, B_2, \cdots, B_k, h+k=2^{n+1}$$

不妨设 $h \leqslant k$.此后第一天的比赛安排如下:

$$A_i \leftrightarrow B_{2^n-i+1}, i=1, \cdots, h$$

如果第一天的比赛所有的 A_i 都获胜,再安排$(A_1, \cdots, A_h)$与$(B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-h})$,这两组之间的比赛.因为 $h+(2^n-h)=2^n$,所以根据归纳假设,只需再进行 n 天比赛就能获知这些选手之间的排列次序.连同前面的结果,在总共 $n+1$ 天的比赛之后,安全排出了选手的排列次序.

下面,我们假定在此阶段的第一天比赛中,并不是所有的 A 组选手都战胜了对手.不妨设 j 是未获胜的 A 组选手的第一个顺序号.这就是说,$A_1, \cdots, A_{j-1}$ 都战胜了对手,但 A_j 没有战胜.下面需要分别考察$(A_1, \cdots, A_{j-1})$与$(B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-j+1})$之间的排列顺序和$(A_j, A_{j+1}, \cdots, A_h)$与$(B_{2^n-j+2}, B_{2^n-j+3}, \cdots, B_k)$之间的排列顺序(顺带说明,如果 $j=1$,那么上面列出的前一部分根本就没有,只需考察后一部分).

这里所列出的两部分,每一部分两组选手的数目之和都是 2^n,即

$$(j-1)+(2^n-j+1)=2^n=(h-j+1)+k-(2^n-j+1)$$

只需进行 n 天比赛,就可以将每一部分所涉及的选手完全排出次序.至于两部

分选手之间的比较,则如前面所述已排出了强弱次序.因此,总共只需安排 $n+1$ 天比赛,就可完全排出所有选手的强弱次序.至此,我们完成了命题的归纳证明.

本题中参赛选手共 32 名.首先将 32 名选手分成十六个 2 人组,用 1 天比赛判定各 2 人组中的强弱次序;再将十六个 2 人组合并成八个 4 人组,用 2 天时间判定各 4 人组中的强弱次序;又将八个 4 人组合并成四个 8 人组,用 3 天时间判定各 8 人组中的强弱次序;再将四个 8 人组合并成两个 16 人组,用 4 天时间判定各 16 人组中的强弱次序;最后将全体 32 名选手合在一起,再用 5 天时间判定所有选手的强弱次序.整届比赛共用去

$$1+2+3+4+5=15$$

天的时间,判定了所有 32 名参赛选手的强弱次序,这正是题目所要求的.