附录(13) 灵活游戏的推广

1.问题与定义

有 m 堆火柴,各堆分别有 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 根.假定两人轮流来取,每次最少取一根,并且取最后一根的人算输.试问在下列各问题中,怎样的情形先取的人赢,怎样的情形先取的人输?

问题1 每人每次可以在一堆里面取任意根,也可以在两堆里面取.但不能在多于两堆里面同时取,并且在两堆里面取的时候,一堆取出的根数是另一堆取出根数的2倍.

问题2 每人每次可以在 a 堆或少于 a 堆里面各取任意根,也可以在 $a+1$ 堆里面取,但不能在多于 $a+1$ 堆里面同时取,并且在 $a+1$ 堆里面取的时候,a 堆中每堆取出的根数必须相同而且等于另一堆中取出根数的2倍.

问题3 每人每次可以在一堆里面取任意根,也可以在两堆里面取.但不能在多于两堆里面同时取,并且在两堆里面取的时候,一堆取出的根数是另一堆取出根数的 $2k$ 倍,这时 k 是任意的正整数.

问题4 每人每次可以在 a 堆或少于 a 堆里面各取任意根,也可以在 $a+1$ 堆里面取,但不能在多于 $a+1$ 堆里面同时取,并且在 $a+1$ 堆里面取的时候,a 堆中每堆取出的根数必须相同而且等于另一堆中取出根数的 $2k$ 倍,这时 k 是任意的正整数.

问题5 每人每次可以在一堆里面取任意偶数根,不能在多于一堆里面同时取,但在各堆中都不能取出偶数根的时候,也就是各堆都只有一根的时候,可以在一堆里面取出奇数根(当然只能取出一根).

问题6 每人每次可以在 a 堆或少于 a 堆里面各取任意偶数根,不能在多于 a 堆里面同时取,但在各堆中都不能取出偶数根的时候,可以在 a 堆或少于 a 堆里面各取奇数根(当然只能取出一根).

在解决这几个问题以前,我们规定下面的几个定义.设 m 堆火柴中各堆的根数为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$,不妨先假定满足条件 $0<n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_m$.

定义1 整数系的第 j 位总和.下面把 m 个正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 的全体叫做整数系 N.如果 N 中各数都用二进制写出来,也就是用2的乘幂写出来,我们就有下列各式

$$n_1 = a_{10}2^0 + a_{11}2^1 + \cdots + a_{1j}2^j + \cdots + a_{1p}2^p$$

$$\vdots$$

$$n_i = a_{i0}2^0 + a_{i1}2^1 + \cdots + a_{ij}2^j + \cdots + a_{iq}2^q$$

$$\vdots$$

$$n_m = a_{m0}2^0 + a_{m1}2^1 + \cdots + a_{mj}2^j + \cdots + a_{mr}2^r$$

这里 a_{ij} 只能够等于 0 或 1. 当 $a_{ij} = 1$ 的时候, n_i 就叫做有第 j 位; 当 $a_{ij} = 0$ 的时候, n_i 就叫做没有第 j 位. 如果整数系 N 中各数的第 j 位都相加起来, 所得总和叫做 A_j, 也就是 $A_j = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ 的时候, 我们就把这总和 A_j 叫做整数系 N 的第 j 位总和. j 可以是任意正整数, 也可以等于零.

定义 2 灵活系与呆板系. 如果整数系 N 中所有 j 位总和 $A_j(j = 0,1,2,\cdots)$ 都是偶数, 也就是 $A_j \equiv 0(\bmod 2)(j = 0,1,2,\cdots)$ 的时候. N 就叫做 1 阶灵活系, 也叫做对于 1 是灵活的.

如果整数系 N 中所有 j 位总和 A_j 都满足 $A_j \equiv 0(\bmod a + 1)(j = 0,1,2,\cdots)$ 的时候, N 就叫做 a 阶灵活系, 也叫做对于 a 是灵活的.

如果整数系 N 中各数满足 $A_0 \equiv 1(\bmod 2)$, $A_j \equiv 0(\bmod 2)(j > 0)$ 的时候, N 就叫做 1 阶 1 级灵活系.

如果整数系 N 中各数满足 $A_b \equiv 1(\bmod a + 1)$, $A_j \equiv 0(\bmod a + 1)(j \neq b)$ 的时候, N 就叫做 a 阶 b 级灵活系.

如果 N 不是灵活系, 我们就把它叫做呆板系.

2. 定理的证明

这一节的几个定理, 是解决 1 中各问题的准备工作.

定理 1 如果

$$n_i = a_{i0}2^0 + a_{i1}2^1 + \cdots + a_{iq}2^q$$

$$u = 2^s(2v + 1), n_i > u$$

$$n_i - u = b_{i0}2^0 + b_{i1}2^1 + \cdots + b_{ip}2^p$$

那么当 $j < s$ 的时候, 就有 $b_{ij} = a_{ij}$; 又当 $j = s$ 的时候就有 $b_{js} \neq a_{is}$. 这就是说 n_i 与 $n_i - u$ 的第 s 位不同, 但第 s 位以前各位完全相同.

证明 这是因为 $u = 2^s(2v + 1)$ 的第 s 位等于 1, 而第 s 位以前各位都等于 0, 所以 $n_i - u$ 的第 s 位与 n_i 的第 s 位不同, 而它们第 s 位以前各位都完全相同.

定理 2 从 1 阶灵活系中减少任意一数, 它就变成呆板的. 反过来说, 在呆板系中适当地减少某一数, 它就能变成 1 阶灵活的.

定理 3 从 a 阶灵活系中减少任意 a 个数, 它就变成呆板的. 反过来说, 在呆板系中适当地减少某 a 个数, 它就能变成 a 阶灵活的.

定理 4 从 1 阶 1 级灵活系中减少任意一数, 或在两数中减少成 1:2 的数目, 新的系就变成呆板的. 反过来说, 从呆板系中适当地减少某一数, 或在两数

中适当地减少成1:2的数目,新的系就变成1阶1级灵活系.

证明 这是因为,从1阶1级灵活系N中减少任意一数,根据定理1,这数至少有一位要变动.于是系N总有某一位的总和改变了奇偶性,也就是说1阶1级灵活系N变成呆板系了.又从N的任意两数中适当地减少成1:2的数目,我们可以假定从n_i中减去$2^s(2v+1)$,从n_{i+1}中减去$2^{s+1}(2v+1)$.于是根据定理1可以看出n_i的第s位已经变动,而n_{i+1}的第s位没有变动,因此N的第s位总和改变了奇偶性,也就是说N变成呆板的了.

定理的第一部分已经证明,下面是第二部分.再分下列三种情况.

(1) 系N中有一个$j(j>0)$位总和是奇数的时候.这时总可以找到最大的s使$A_s\equiv 1(\bmod 2)$.假设n_i含有第s位(即$a_{is}\equiv 1$),我们就可以按照定理1在n_i中减少一个数目u使n_i-u中没有第s位,而且n_i-u中小于s大于0的各位数字,有下列的变化:

i 当n_i中有这位数字,而N中这位的总和是奇数的时候,就使n_i-u中去掉一段第0位.

ii 当n_i中没有第0位,而N中第0位总和是偶数的时候,就使n_i-u中添加第0位.

iii 不论n_i中有或没有第0位,而N中第0位总和是奇数的时候,就使n_i-u中第0位与n_i中第0位完全一样.

这样N就满足$A_0\equiv 1(\bmod 2)$,$A_j\equiv 0(\bmod 2)(j>0)$,也就是系$N$变成1阶1级灵活系了.

(2) 系N中所有j位总和都是偶数而$A_0\neq 0$的时候.这时只要去掉一个有第0位数的第0位,N就变成1阶1级灵活系了.

(3) 系N中所有j位总和都是偶数而$A_0=0$的时候.这时总可以找到最小的s而$A_s\neq 0$.假设n_i与n_{i+1}都有第s位,我们只要把这两数的某一个减去1,另外一个减去2,就使N变成1阶1级灵活系了.

根据上述三种情况,定理4就完全证明了.

定理5 从a阶1级灵活系中减少任意a个数,或在$a+1$个数中减少成1:2:2:…:2的数目,新的系就变成呆板的.反过来说,从呆板系中适当地减少某a个数,或在$a+1$个数中适当地减少成1:2:2:…:2的数目,新的系就变成a阶1级灵活系.

证明 这是因为,从a阶1级灵活系N中减少任意a个数,根据定理3,这时N中至少有一位的总和要变动.假设第j位总和有变动,变动了b.因为$|b|<a$,所以$A_j-b\not\equiv 0(\bmod a+1)(j>0)$或$A_j-b\not\equiv 1(\bmod a+1)(j=0)$.因此$N$已经不是$a$阶1级灵活系了.

又在 $a+1$ 个数中减少成 $1:2:2:\cdots:2$ 的数目，这时假设减去的是 $2^s(2v+1)$ 与 a 个 $2^{s+1}(2v+1)$. 根据定理1，就知道 N 中第 s 位总和有变动. 因此 N 不是 a 阶1级灵活系了.

定理的第一部分已经证明，下面是第二部分. 再分下列三种情况：

(1) 系 N 中有一个 $j(j>0)$ 位总和 $A_j \not\equiv 0(\bmod a+1)$. 这时仿照定理3(只第0位总和的变更略有不同)，就可以使 N 变成 a 阶1级灵活系了.

(2) 系 N 中所有 j 位总和 $A_j \equiv 0(\bmod a+1)$ 而 $A_0 \neq 0$. 这时只要适当地去掉 a 个有第0位数的第0位，N 就变成 a 阶1级灵活系了.

(3) 系 N 中所有 j 位总和 $A_j \equiv 0(\bmod a+1)$ 而 $A_0=0$. 这时总可以找到最小的 s 而 $A_s \neq 0$. 于是只要在 a 个有第 s 位数的数中都减去2，而在另一个有第 s 位的数中减去1，就使 N 变成 a 阶1级灵活系了.

根据上述三种情况，定理就完全证明了.

定理6 从 a 阶2级灵活系中减少任意 a 个数，新的系就变成呆板的. 但变动呆板系中任意 a 个数不一定把它变成 a 阶2级灵活的. 如果呆板系 N 中 $A_1 \neq 0$ 或者有一个 $A_j \not\equiv 0(\bmod a+1)(j>1)$，那么适当地减少 N 中 a 个数就可以把它变成 a 阶2级灵活的.

证明 这是因为，从 a 阶2级灵活系 N 中减少任意 a 个数，根据定理3，这时 N 中至少有一位的总和要变动. 因此 N 就不是 a 阶2级灵活系了.

如果 N 中 $A_1=0$ 而其他的 $A_j \equiv 0(\bmod a+1)(j \neq 1)$，这时变动 N 中任意 a 个数就不能使它成为 a 阶2级灵活的. 这是因为，当 $m<a+1$ 而所有 $A_j=0$ $(j>1)$ 的时候，显然没有方法使 $A_1 \equiv 1(\bmod a+1)$. 又当 N 中有一个 j 使 $A_j \neq 0$ 的时候，我们就要变动第 $s(s>1)$ 位才有可能使 $A_1 \equiv 1(\bmod a+1)$，但这样第 s 位总和 $A_s \not\equiv 0(\bmod a+1)$，因此仍然没有方法使 N 成为 a 阶2级灵活的.

至于呆板系 N 中 $A_1 \neq 0$ 或有一个 $j(j>1)$ 而 $A_j \not\equiv 0(\bmod a+1)$ 的情形，我们根据定理3就可以适当地把 N 变成 a 阶2级灵活的. 因此定理6完全得证.

3. 问题的答案

根据上面的定理就得到1中各个问题的答案.

问题1的答案 如果 N 是1阶1级灵活系，先取的人就一定输.

证明 因为1是最小的1阶1级灵活系，根据定理4，就知道答案是正确的.

问题2的答案 如果 N 是 a 阶1级灵活系，先取的人就一定输.

证明 因为1是最小的 a 阶1级灵活系，根据定理5，就知道答案是正确的.

问题3的答案

这时可以分两种情形.

(1) 如果每堆火柴只有一根，而且堆数是一个奇数，也就是 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = 1, m \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ 的时候，先取的人一定输.

(2) 如果 N 是 1 阶灵活系，而且至少有一堆火柴不只一根. $n_m > 1$ 的时候，先取的人一定输.

证明 第(1) 种情形的答案显然是正确的，因为这时每人每次只能取一根火柴.

下面证明第(2) 种情形的答案也是正确的，这时如果先取的人只在一堆中取，按照定理 2 他一定把 1 阶灵活系 N 变成呆板的. 于是后取的人再按照定理 2 一定可以把这个呆板系变成 1 阶灵活系.

如果先取的人在两堆中取，假设取出的根数分别是 $2^s(2v + 1)$ 与 $2k \cdot 2^s(2v + 1) = 2^{s+t}(2w + 1)$. 因为 $k \geqslant 1$，所以 $t \geqslant 1$. 根据定理 1 就知道先取的人把 N 变成呆板系了. 又根据定理 4，就知道后取的人还可以把这个呆板系变成 1 阶灵活系.

这样推下去，总有一次后取的人会遇到下面的呆板系 N，这 N 中只有一堆的根数大于 1，其余各堆的根数都等于 1. 这时如果根数是 1 的堆数，恰恰是一个奇数，后取的人就可以把根数大于 1 的那堆全部取去. 如果根数是 1 的堆数，恰恰是一个偶数，后取的人就可以把根数大于 1 的那堆取成只剩下一根. 这样就变成第(1) 种情形. 因此答案是正确的.

问题 4 的答案

这时可以分两种情形.

(1) 如果每堆火柴只有一根，而且堆数用 $a + 1$ 除的剩余恰恰是 1，也就是 $n_m = 1, m \equiv 1(\mathrm{mod}\,a + 1)$ 的时候，先取的人一定输.

(2) 如果 N 是 a 阶灵活系，而且至少有一堆火柴不只一根($n_m > 1$)的时候，先取的人一定输.

证明 第(1) 种情形的答案显然是正确的. 因为这时每人每次最多只能取 a 根火柴.

下面证明第(2) 种情形的答案也是正确的. 这与问题 3 的答案中所说第(2) 种情形相似，利用定理 5，后取的人每次可以把遇见的呆板系变成 a 阶灵活系.

这样推下去，总有一次后取的人会遇到下面的呆板系 N，这 N 中只有少于 $a + 1$ 个堆的根数大于 1，其余各堆的根数都不大于 1. 这时后取的人只要把根数大于 1 的那些堆适当地取去一些就可以使 N 变成第(1) 种情形. 因此答案是正确的.

问题 5 的答案

这时可以分成三种情形.

(1) 如果 N 是 1 阶 1 级灵活系,先取的人一定输.

(2) 如果 N 中每堆最多根数等于 3,而且 N 是 1 阶 2 级灵活系,先取的人一定输.

(3) 如果 N 中至少有一堆的根数大于 3,而且 N 是 1 阶灵活系,先取的人一定输.

证明 根据定理 1,先取的人取出偶数根,使 N 变成呆板的,而 A_0 不曾变动.于是根据定理 2,后拿的人可以使这呆板系变成 1 阶灵活系.又因为 1 是最小的 1 阶 1 级灵活系,所以答案(1) 是正确的.

答案(2) 的正确性是因为根据定理 1,先取的人只能把 1 阶 2 级灵活系变成呆板的.这时如果呆板系中 $A_1 \neq 0$,根据定理 6,后取的人就可以把它变成 1 阶 2 级灵活系.如果呆板系中 $A_1 = 0$,但因为 $A_0 \equiv 0 \pmod 2$,所以先取的人一定输.

答案(3) 的正确性,可以参见下面定理 6 中答案(3) 的证明.

问题 6 的答案

这时又可以分成三种情形.

(1) 如果 N 是 a 阶 1 级灵活系,先取的人一定输.

(2) 如果 N 中每堆最多根数等于 3,而且 N 是 a 阶 2 级灵活系,先取的人一定输.

(3) 如果 N 中至少有一堆的根数大于 3,而且 N 是 a 阶灵活系,先取的人一定输.

证明 答案(1) 与答案(2) 的正确性与问题 5 中答案(1)(2) 相似,证明从略.

答案(3) 的正确性是因为按照取火柴规定,先取的人一定把 a 阶灵活系 N 变成呆板的(定理 3),但 A_0 没有变动.这样后取的人可以使这呆板系变成 a 阶灵活的,一直到遇到下面的呆板系 N.这 N 中只有少于 $a+1$ 个堆的根数大于 3,其余各堆的根数都不大于 3.这时根据定理 6,后取的人可以把这样的呆板系变成 a 阶 2 级灵活系并满足第(2) 种情形的条件.因此答案(3) 完全得证.

4. 没有解决的问题

我们把 1 中所提的问题稍加改变如下.

有 m 堆火柴,假定两人轮流来取,每次最少取一根,并且取最后一根的算输.如果规定每人每次可以在一堆里面取任意根,也可以在两堆里面取,但不能在多于两堆里面同时取,并且在两堆里面取的时候,一堆取出的根数是另一堆取出根数的 3 倍.问怎样的情形先取的人赢,怎样的情形先取的人输?

这是一个还没有解决的问题.

(罗卓林)