❖分球问题

汤普逊与约翰共有若干个球，它们分布在 $2n+1$ 个袋中，如果汤普逊取走一个袋，约翰总可以把剩下的 $2n$ 个袋分成两组，每组 n 个袋，并且这两组的球的个数相等.试证：每个袋中的球的个数相等.

证明　用数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 分别表示这 $2n+1$ 个袋中的球的个数.显然，$a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 是非负整数.不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n+1}$.于是问题转化为：有 $2n+1$ 个非负整数，如果从中任意取走一个数，剩下的 $2n$ 个数可以分成两组，每组 n 个，其数字和相等.证明这 $2n+1$ 个数全相等.

因为 $2\mid(a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1})-a_i, i=1,2,\cdots,2n+1$. $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 具有相同的奇偶性.易知把它们都减去 a_1 后所得的 $2n+1$ 个数 $0,a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_{2n+1}-a_1$ 也满足题意.因 a_i-a_1 都是偶数，$0,\frac{a_2-a_1}{2},\frac{a_3-a_1}{2},\cdots,\frac{a_{2n+1}-a_1}{2}$ 这 $2n+1$ 个数也满足题意，且也都是偶数.

把它们再都除以 2，…，这个过程不可能永远继续下去，除非

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$$

所以，每个袋中的球的个数相等.