附录(7)　长方形台球桌的问题

长方形台球桌 $ABCD$ 上有 P 与 Q 两个台球，如果使 P 依次撞着台边 DA，AB，BC 与 CD 再撞着 Q，试求 P 打出的方向，并且把 P 所走的路线画出来.

我们先回答这个问题，并研究依次撞着各边而不必限定先撞 DA 的一般情形.

解　假设问题中所求的路径是图1中的折线 $PEFGHQ$. 于是依据物理学上投射角等于反射角的性质，可以知 FE 必定通过 P 关于 AD 的对称点 P_1，又 FG 必定通过 P_1 关于 AB 的对称点 P_2，也就是 FG 必定通过 P 关于 A 的中心对称点 P_2. 同样 FG 也必定通过 Q 关于 C 的中心对称点 Q_2. 由于 P_2，Q_2 是定点，可以先行作出. 因此连 P_2，Q_2 即可求得 F 与 G.

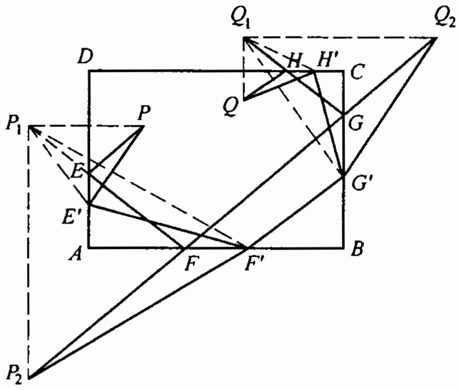

图1

做法　(1) 作 P 关于 AD 的对称点 P_1，再作 P_1 关于 AB 的对称点 P_2.

(2) 作 Q 关于 CD 的对称点 Q_1，再作 Q_1 关于 BC 的对称点 Q_2.

(3) 连 P_2Q_2 交 AB 于 F，交 BC 于 G.

(4) 连 P_1F 交 AD 于 E，再连 PE.

(5) 连 Q_1G 交 CD 于 H，再连 QH 即得所求. 证明甚易从略.

推论　假设 E'，F'，G'，H' 分别是 DA，AB，BC，CD 上任意点，那么折线 $PEFGHQ$ 的长度就要小于折线 $PE'F'G'H'Q$ 的长度，即折线 $PEFGHQ$ 有最小的长度.

这时由对称关系得知

$$PE + EF = P_1E + EF = P_2F, QH + HG = Q_1H + HG = Q_2G$$

因此折线 $PEFGHQ$ 的长度等于 P_2Q_2. 又

$$PE' + E'F' = P_1E' + E'F' > P_1F' = P_2F'$$

$$QH' + H'G' = Q_1H' + H'G' > Q_1G' = Q_2G'$$

因此折线 $PE'F'G'H'Q$ 的长度大于 $P_2F' + F'G' + G'Q_2$，当然要大于 P_2Q_2. 这就证明了折线 $PE'F'G'H'Q$ 的长度大于折线 $PEFGHQ$ 的长度.

讨论 现在讨论本题是否有解?如果有解,有几个解?

本题有解的充分必要条件是 P_2Q_2 必定与线段 AB,BC 相交,而不是交在它们的延长线上面.当 P 的位置一经决定,P_2 的位置也就固定.连 P_2C 交 AB 于 R,于是 R 的位置也就固定.再假定 M 是 BC 的中点,就得到下面共三种情形.

ⅰ 当 P 在 $\triangle DAC$ 内(或在线段 AC 上),Q 在梯形 $ARCD$ 内,这时有一解.

这是因为,P 与 Q_2 分别在 CP_2 的异侧,所以 P_2Q_2 与线段 AB,BC 相交,因此有一解(见图 2).

当 P 在线段 AC 上,Q 在 $\triangle DAC$ 内就有一解,因为这时梯形 $ARCD$ 变成 $\triangle DAC$.

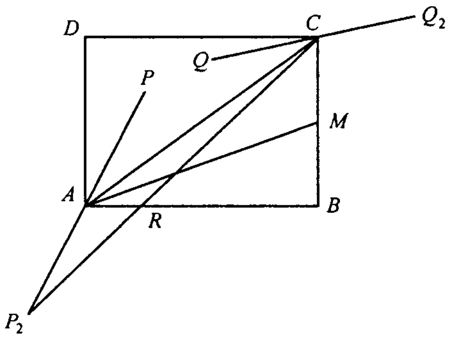

图 2

ⅱ 当 P 在 $\triangle DAC$ 内(或在线段 AC 上),Q 在 $\triangle RBC$ 内,这时没有解.

这是因为,P 与 Q_2 在 CP_2 的同侧,所以 P_2Q_2 与线段 BC 的延长线相交,因此没有解(见图 3).

ⅲ 当 P 在 $\triangle DAC$ 内(或在线段 AC 上),Q 在 RC 上,这时没有解.

这是因为,P_2Q_2 与 RC 重合,即 C 是 P_2Q_2 与 BC 的交点,所以没有解(仍见图 3).

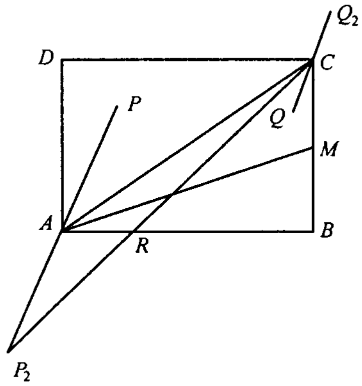

图 3

如果 P 在 $\triangle ABC$ 内,就再分成下列三种情形.这时首先连 AP 交 BC 于 N.在 BC 延长线上取 $CN' = NC$,再作直线 $N'T \parallel AN$ 分别交 DC 于 S,交 DA 于 T.

ⅰ 当 P 在 $\triangle MAC$ 内(不在周界上),Q 在 $\triangle DST$ 内(不在周界上),这时有一解.

这是因为,根据对称关系(见图 4),Q 与 Q_2 分别在 P_2N 的异侧,所以 P_2Q_2 与线段 AB,BC 相交,因此有一解.

ⅱ 当 P 在 $\triangle MAC$ 内(或在周界上),Q 在五边形 $ABCST$ 内面,这时没有解.

这是因为,Q 与 Q_2 同时在 P_2N 的同侧,所以 P_2Q_2 与 BA 的延长线相交,因

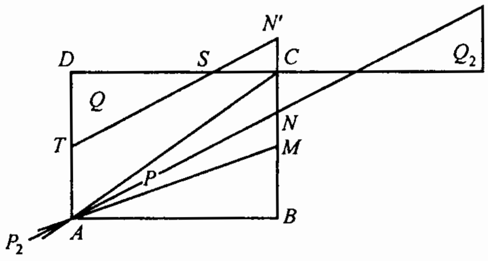

图 4

此没有解.

ⅲ 当 P 在 $\triangle MAB$ 内(或在周界上), Q 无论在哪里都没有解.

这是因为, P_2 与 BC 上任意点的连线都不与 AB 相交,因此没有解.(见图 5)

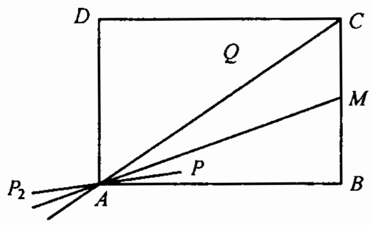

图 5

一般情形 现在研究依次撞着各边而不必限定先撞 DA 的情形.这时一般有四解,这四解的全长并不相同,下面研究先撞哪一边方能得最短的路径.

(1) 先撞 AD 边.先作 P 关于 A 的中心对称点 P_2,再作 Q 对于 C 的中心对称点 Q_2.然后连 P_2Q_2 交 AB, BC 于 F 及 G,因而得出 E, H 两点.(见图 6)

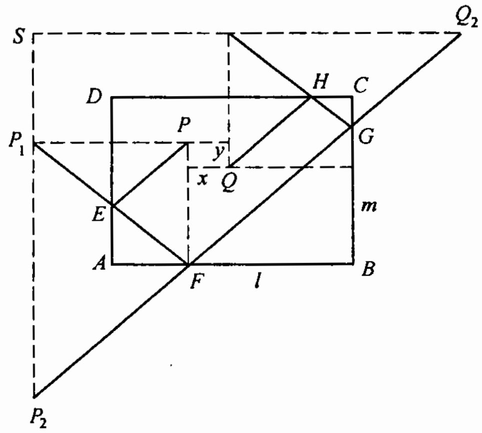

图 6

假定 P, Q 的水平距离等于 x, P, Q 的垂直距离等于 y.再令 $AB = l$, $BC = m$.于是有 $Q_2S = 2l - x$, $P_2S = 2m + y$,所以

$$P_2Q_2^2 = (2l - x)^2 + (2m + y)^2 \quad ①$$

(2) 先撞 CE 边.先作 P 关于 E 的中心对称点 P_3,再作 Q 关于 D 的中心对称点 Q_3.然后连 P_3Q_3 交 AD,AB 于 G 及 F,因而得出 E,H 两点.(见图 7)

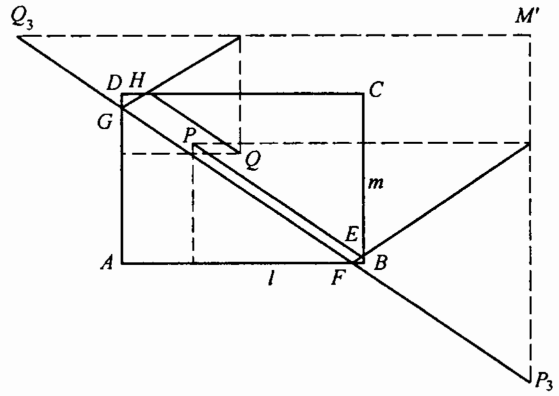

图 7

这时 $P_3M' = 2m + y$,$Q_3M = 2l + x$,所以

$$P_3Q_3^2 = (2l + x)^2 + (2m + y)^2 \cdots \quad ②$$

(3) 先撞 CD 边,然后按顺时针旋转方向依次与各边相撞.

先作 P 关于 C 的中心对称点 P_4.再作 Q 关于 A 的中心对称点 Q_4,然后连 P_4Q_4 交 AB,BC 于 G 及 F,因而得出 E,H 两点.(见图 8)

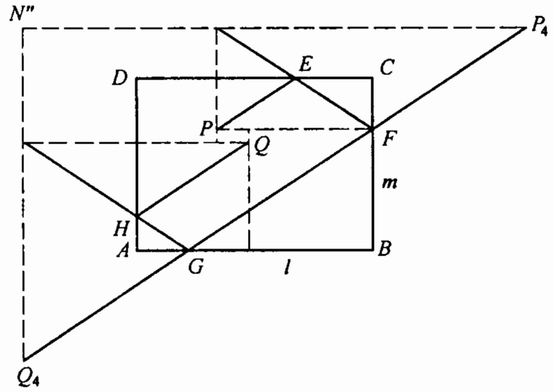

图 8

这时 $Q_4N'' = 2m - y, P_4N'' = 2l + x$
所以

$$P_4Q_4^2 = (2l + x)^2 + (2m - y)^2 \cdots \qquad ③$$

(4) 先撞 CD 边，然后按逆时针旋转方向依次与各边相撞.

先作 P 关于 D 的中心对称点 P_1，再作 Q 关于 B 的中心对称点 Q_1，然后连 P_1Q_1 交 AB, AD 于 G 及 F，因而得出 E, H 两点.（见图 9）

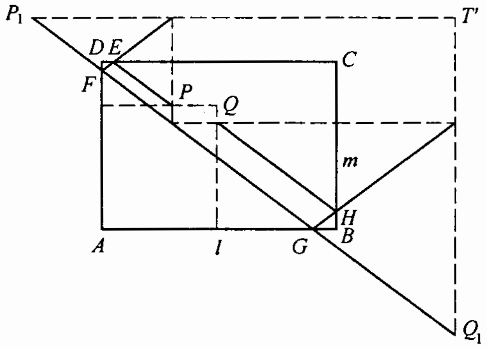

图 9

这时 $P_1T' = 2l - x, Q_1T' = 2m - y$，所以

$$P_1Q_1^2 = (2l - x)^2 + (2m - y)^2 \cdots \qquad ④$$

根据上面的①②③④四个式子，可以看出 $P_1Q_1 = \sqrt{\{(2l - x)^2 + (2m - y)^2\}}$ 的时候，所走路径最短. 这是第(4)种情形，这时从 P, Q 到矩形短边距离的和小于 $2l$，从 P, Q 到矩形长边距离的和小于 $2m$.

其他的情形，不是从 P, Q 到矩形短边距离的和大于 $2l$，就是从 P, Q 到矩形长边距离的和大于 $2m$.

最短路径的求法　要取怎样的方向相撞才可得最短路径可采用下法.（见图 9）

(1) 作矩形 PQ 使各边分别与原矩形 $ABCD$ 的各边平行.

(2) 取角顶 D，使矩形 DP 的边与矩形 PQ 的边无公共点. 再作 P 关于 D 的中心对称点 P_1.

(3) 取角顶 B，使矩形 BQ 的边与矩形 PQ 的边无公共点. 再作 Q 关于 B 的中心对称点 Q_1.

(4) 连 P_1Q_1 交 DA, AB 于 F 及 G，因而得出 E, H 两点，即可求得最短路径 $PEFGHQ$.

讨论　现在讨论 P, Q 的位置与解数的关系.

(1) 如果 P,Q 与原矩形的边平行,就有 $x=0$ 或 $y=0$. 于是四解中有二解的全长相等,另外二解的全长也相等.

(2) 如果 P,Q 重合,就有 $x=y=0$. 这时四解的长度都等于$2\sqrt{l^2+m^2}$,即等于原矩形两对角线总和的两倍.

这时根据图 10,有 $\angle 1=\angle PP_1E=\angle AFE=\angle 2$,所以 $PE \parallel FG$. 又 $\angle 3=\angle PP_2H=\angle CGH=\angle 4$,所以 $PH \parallel FG$. 因此 P,E,H 在一直线上,并且$EH \parallel FG$. 同理 $EF \parallel GH$.

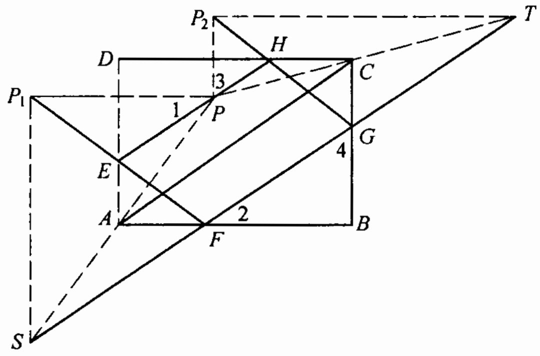

图 10

又因为 A,C 分别是PS,PT 的中点,所以 $AC \parallel ST$. 即所求路径成一平行四边形,各边分别与原矩形的对角线平行,而路径的全长等于原矩形两对角线相加的总和.

(3) 如果 P,Q 的位置加以变化,有时有四解,也有时只有三解,二解,一解或没有解.