❖巨型数字

考虑大数 $N = 3^{3^{3^{\cdots^{3}}}}$，其中总共有 1 000 个 3，计算 N 最右边的一位数字.

解 对于正整数 K，3^K 最右边的数字是什么?对于 $K = 1,2,3,4,5,6$，回答是 3,9,7,1,3,9，且见到序列每四位一重复，这样对于很大的 K 要确定 3^K 的最后一位数字，我们需要知道，4 除 K 的余数.

现有 $N = 3^M$，其中 $M = 3^{3^{3^{\cdots^{3}}}}$ 共有 999 个 3，我们研究当 $l = 1,2,3,4,5$ 时，3^l 除以 4 的余数，回答是 3,1,3,1,3，且我们见到，此问题的答案取决于 l 是奇数还是偶数，现有 $M = 3^Q$，其中 Q 为奇数，因而 M 除以 4 的余数为 3，由此得 $N = 3^M$ 的最后一位数字是 7.

为使论证严格，我们需要证明，对于整数 a 和 b，$3^{2n+1} = 4a + 3$，而 $3^{4a+3} = 10b + 7$，我们有 $3^{2n+1} = 3(1+8)^n$，且我们见到 $(1+8)^n$ 是 1 加上 8 的倍数，这就证明了第一个事实. 现在 $3^{4a+3} = 27(1+80)^a$，而既然 $(1+80)^a$ 是 1 加上 80 的倍数，即得第二个事实.