

❖ 赶快救火

在一块平地上有 n 个人,对每个人,他到其他人的距离均不相同.每人都有一把水枪,当发出失火信号时,每人用枪击中距他最近的人.证明:当 n 为奇数时,至少有一个人身上是干的.当 n 为偶数时,这个结论是否永远正确?

证明 当 n 为奇数时,设 $n = 2m - 1$,对 m 应用归纳法. $m = 1$ 时, $n = 1$,结论显然成立.设命题对 m 成立.考虑 $2m + 1$ 个人的情形.设 A, B 两人间的距

离在所有的两人间的距离为最小. 将 A, B 两人撤出后, 由归纳假设, 剩下的 $2m - 1$ 个人中至少有一人 C 的身上 是干的. 再把 A, B 加进去后, 因 $AC > AB$, $BC > AB$, 所以 C 身上仍是干的.

当 n 为偶数时, 命题不真. 事实上, 设 $n = 2m$, $2m$ 个人记为 $A_j, B_j (j = 1, 2, \dots, m)$, 设 A_j 与 B_j 的距离为 1, 而与其他人的距离都大于 1. 例如, 设 A_j 及 B_j 分别位于数轴上的 $3j$ 及 $3j + 1 (j = 1, 2, \dots, m)$ 处, 这时 A_j 和 B_j 互相击中.