❖矩内含方

把一个 $n\times n$ 的正方形分割成 n^2 个 1×1 的正方形，试求满足下述条件的自然数 n 的最大值：可选出 n 个 1×1 的正方形予以标号，使对任一 $p\times q$ 的矩形（其边界或为原正方形的边，或为分割线）内至少包含一个已标号的 1×1 正方形，这里设 $pq\geqslant n$.

解　n 的最大值为 7，证明如下：

不妨设 $n\geqslant 3$（因为 $n=2$ 不是最大），显然，若 n 个标号的方块（即 1×1 正方形）满足要求，则在原正方形分割网格中的每一行及每一列中都应有且只有一个．把这 n 个方块依其所在的列编号为 $1,2,3,\cdots,n$，设 1 号方块所在行为 A，取与 A 相邻的行 B，再取与 A 相邻（但不与 B 重行）或与 B 相邻（但不与 A 重合）的行 C．设行 B 中有编号为 b 的方格，则当 $b\leqslant n-\left[\frac{n}{2}\right]$ 或 $b>\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 时，在 A 行及 B 行中可找到面积不小于 n 的长方形，不含任何标号的方块．因此

$$n-\left[\frac{n}{2}\right]<b<\left[\frac{n}{2}\right]+2$$

现在考虑两个长方形，一个是由行 A,B,C 与第 $2,3,\cdots,n-\left[\frac{n}{2}\right]$ 列的交组成；一个由行 A,B,C 与第 $2+\left[\frac{n}{2}\right],\cdots,n$ 列的交组成．这两个长方形中都不含位于 A,B 中的标号方格．若 $n>7$，这两个长方形的面积都不小于 n，但行 C 中只有一个标号方格，于是，这两个长方形中总有一个不含标号方格．所以，$n\leqslant 7$.