

◆ 电影院问题

电影院中共有 m 排座位,每排各有几个座位,票房共售出 mn 张电影票,但由于疏忽,票上的排次和座次有所差别,以致并非所有观众都能对号入座,但所幸的是,观众们可以这样来入座,即使得排次和座次中至少有一个与票相符.

(1) 证明:观众们可以这样来入座,即可使得其中至少有一人的排次和座次都与票相符,而其余人则至少有一个号与票相符.

(2) 在最坏的情况下,最多可有多少个观众的排次和座次都与票相符,并保证其他人都至少有一个号与票相符?

解 (1) 假定每位观众所坐的位置,在排次和座次中都至少有一个与票相符,将其中任意一位观众编为 1 号,将那位坐在 1 号观众的票所标注的位置上的观众编为 2 号,如此下去,将坐在第 $k-1$ 号观众的位置上的那位观众编为 k 号,由于观众数目是有限的,所以必在某一时刻会对某位观众作第二次编号. 找出最先作第二次编号的观众,设他的两个号码为 k_1 和 k_2 ($k_1 < k_2$). 显然,编号为 k_1 至 k_2-1 号的观众是各不相同的,令他们按如下方式调整座位:让 k_1 号观众坐到 k_1+1 号观众原来所坐的位置上, k_1+1 号观众坐到 k_2+2 号观众的位置上,如此等等, k_2-1 号观众则坐到 k_1 号观众原来的位置上. 其余观众则都保持不动. 于是,所有调整过座位的观众现在的座位都与票相符(他们共有 $k_2-k_1 \geq 1$ 个人),而其余的人的座位则仍在排次和座次之一上与票相符.

(2) 1 人. 前面已证,至少可有 1 人坐到与票相符的位置上. 我们来观察这样一种情况:所有售出的票上的座位号都是 1 号,并且其中有 $m+n-1$ 张票标的都是 1 排,而且各有 $n-1$ 张票标为其余各排. 这样一来,为了能按题目条件入座,那么所有持 1 排 1 号票的观众就一定要占据了全部第一排以及以后各排的全部 1 号位置,这样,所有其他观众便只能按排号入座,而且不能再坐到 1 号位置上. 从而,其中只有那一位坐在 1 排 1 号位置上的观众在排次和座次上都正确.