❖字母序列

考虑由两个字母 A 和 B 构成的词所组成的这样一个序列:序列中的第一个词是“A”.第 k 个词是由第 $k-1$ 个词经过下面的变换得到:每个 A 替换为 AAB,以及每个 B 替换为 A.容易看出每个词是它的下一个词的起始部分.这些词的起始部分相当于给出了一个字母序列

$$AABAABAAABAABAAB\cdots$$

(1) 这个序列中的第 1 000 个字母 A 在哪一位置出现?

(2) 证明:这个序列不是周期的.

解 (1) 以 S_n 表示这序列中的第 n 个词，S_n 是由 S_{n-1} 经过字母的替换得到的，我们用符号 $t(S_{n-1}) = S_n$ 来表示.注意到词 S_3 是由两个词 S_2 和一个词 S_1 按这一次序连在一起组成的.这一性质我们用符号 $S_3 = S_2 \circ S_2 \circ S_1$ 来表示.我们来证明：对 $n \geqslant 3$ 有 $S_n = S_{n-1} \circ S_{n-1} \circ S_{n-2}$ 成立.

已知 $n = 3$ 时成立.假定对某个 $n(n \geqslant 3)$ 成立.那么，我们有

$$\begin{aligned}S_{n+1} = t(S_n) = t(S_{n-1} \circ S_{n-1} \circ S_{n-2}) = \\ t(S_{n-1}) \circ t(S_{n-1}) \circ t(S_{n-2}) = \\ S_n \circ S_n \circ S_{n-1}\end{aligned}$$

因此就证明了我们要的结论.以 a_n 和 b_n 分别表示 S_n 中字母 A 和 B 的个数，那么有 $a_1 = 1, b_1 = 0$，以及对 $n \geqslant 2$，有 $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ 及 $b_n = a_{n-1}$.容易算出下面的表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985
b_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$a_n + b_n$	1	3	7	17	41	99	239	577	1 393

显见，第 1 000 个字母 A 出现在 S_{10} 中，1 000 可这样表示为 a_n 的和：

$$1\,000 = 985 + 12 + 2 + 1 = a_9 + a_4 + a_2 + a_1$$

注意到 S_{10} 可表示为

$$S_{10} = S_9 \circ S_4 \circ S_2 \circ S_1$$

由此及

$$a_9 + b_9 + a_4 + b_4 + a_2 + b_2 + a_1 + b_1 = 1\,414$$

就可推出这就是第 1 000 个 A 的位置.

(2) 首先证明对所有的 n

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} > \sqrt{2} + 1, \frac{a_{2n}}{b_{2n}} < \sqrt{2} + 1$$

我们有

$$\frac{a_2}{b_2} < \sqrt{2} + 1, \frac{a_3}{b_3} > \sqrt{2} + 1$$

假定对某个 n 有

$$\frac{a_{2n}}{b_{2n}} < \sqrt{2} + 1$$

那么就有

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} = \frac{2a_{2n} + a_{2n-1}}{a_{2n}} = 2 + \frac{b_{2n}}{a_{2n}} > 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

假定对某个 n 有

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} > \sqrt{2} + 1$$

那么就有

$$\frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} = \frac{2a_{2n+1} + a_{2n}}{a_{2n+1}} = 2 + \frac{b_{2n+1}}{a_{2n+1}} < 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

这就用归纳法证明了所要的结论. 假定这个序列是周期的. 设 p 和 q 分别是在一个周期中字母 A 和 B 的个数. 因为 $\frac{p}{q}$ 是有理数,不会等于 $\sqrt{2}+1$. 我们可以假定

$$\sqrt{2} + 1 - \frac{p}{q} = \varepsilon > 0$$

因为 $\varepsilon < 0$ 的情形可以类似处理, $\frac{p\epsilon}{q}$ 是固定的数. 设 k_0 是大于 $\frac{p\epsilon}{q} + 1$ 的最小整数,那么对所有的 $k \geqslant k_0$,有

$$\sqrt{2} + 1 > \frac{p}{q}\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

对每个 n,设 k 是这样一个正整数: S_n 包含 $k-1$ 个周期但少于 k 个周期. 我们选择 n 是足够大的奇数,使得 $k \geqslant k_0$. 这样,在 $k-1$ 个周期中有 $(k-1)q$ 个字母 B. 因此, $b_n \geqslant (k-1)q$. 由此推出

$$a_n > b_n(\sqrt{2} + 1) > b_n \frac{p}{q}\left(\frac{k}{k-1}\right) \geqslant pk$$

然而, S_n 由少于 k 个周期组成,而在 k 个周期中仅有 pk 个字母 A,和上式矛盾.