

❖ 天书的秘密

在神秘的王国里有一个图书馆,其中有一本书是国王特别珍爱的,有一天他对自己的大臣说起来.

“把这本书随便翻到哪一页.告诉我那里写着什么数!”国王吩咐说,顺从的大臣说出了数 4 783.

“现在,随你翻多少页,告诉我你翻到的那一页上写着什么数!”执行了这个命令后,大臣说出了数 1 955.

“现在,随你取两个四位数!”国王继续说,大臣选了 2 079 和 7 081.

“请你从第一个得到的数(即 4 783)开始,到第二个(即 1 955)为止,按照书上的次序,大声地读出 2 079 和 7 081 之间的所有的数.”

顺从的大臣也完成了这个不容易的任务,他必须念完 2 000 个左右的数,从中去掉大约 1 000 个.

然后,国王叫大臣检查一下,剩下来的数所形成的数列相邻项之差等于什么,结果,这些差仅仅只取三个不同的值!

你能不能以一个不大的模型(国王的书里有一万个数)为例,说明这本魔

书的秘密在哪里？

解 国王的魔书是以下述原则为基础的。

考虑 10 000 对数 $(n, nz - [nz])$ ，其中 $z = (\sqrt{5} - 1)/2$ 是(与“黄金分割”联系在一起的)“黄金数”， n 是从 1 到 10 000 的自然数列，符号 $[x]$ 是数 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数。把这些数偶这样地分布，使它们的第二个数 $nz - [nz]$ 形成增列，然后，按照这种次序写出每个数偶对应的第一项 n ，所得的表叫铁数表。

例如，我们对 $n = 10$ ，即对自然数 1 到 10 作铁数表。

因 $\sqrt{5} \approx 2.236$ ，则 $z = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ ，对这 10 个数有

n	$nz - [nz]$	n	$nz - [nz]$
1	0.618	6	0.708
2	0.236	7	0.326
3	0.854	8	0.944
4	0.472	9	0.562
5	0.090	10	0.180

$nz - [nz]$ 这一列中最小的数是 0.090，因而，对头十个自然数构造的铁数表，它的第一个位置应该放 5，然后是 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8。

这样一来，自然数列从 1 到 10 这一段的铁数表是

$$5, 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8$$

类似地，对自然数列随便多长的一段可以构造铁数表。

任何一张铁数表，不管用哪些数构造它，都有下列性质：相邻两数之差至多取三个值。

例如，上面这张表里，相邻两数之差是

$$5, -8, 5, -3, 5, -8, 5, -3, 5$$

它只取 5, -8, -3 这三个值。

当从铁数表里去掉所有比任意指定的某个数大的数，或者去掉所有比任意指定的某个数小的数，或者去掉任意两个数之间的数时，铁数表的这种性质仍然保持，例如，在上面所举出的表里去掉比 3 小的所有的数，便得到表

$$5, 10, 7, 4, 9, 6, 3, 8$$

它的相邻项之差仍然只有两个

$$5, -3, -3, 5, -3, -3, 5$$

国王珍视的魔书，就是建立在铁数表的这种性质上的。