

❖打字次序问题

在一个办公室中,一天之内主任在不同的时刻分别交给他的秘书一封要打字信,每次他都将信放进秘书的收文盒中.且放在最上面,秘书在有空的时候就拿出最上面的一封信打字.一天之内要打的信有九封,主任给出的信的次序是1,2,3,4,5,6,7,8,9(数字代表信件编号).吃午饭时,秘书告诉她的一位同事,8号信已经打字完毕,但关于早上打字的情况再也没有说什么.这位同事不知道九封信中还有哪几封留待午饭后打字,也不知道它们打字的次序将是怎样的.在上述信息的基础上,午饭后打字的次序可能有多少种(没有一封信留下要打字也是一种可能性)?

解 分两种情况进行讨论:

(1) 午饭前主任已把第9号信交给秘书,午饭后秘书的同事打字的次序的情形有:

i 没有一封信留下要打字,是1种可能性,记为 C_8^0 .

ii 有一封信留下要打字,有 C_8^1 种次序.

iii 有二封信留下要打字,例如3号和9号要打,只有先打9号后打3号1种次序,总是先打大号码的信,后打小号码的信,因此有 C_8^2 种次序.

iv 有三封信留下要打字,共有 C_8^3 种次序.

⋮

ix 有八封信留下要打字,共有 C_8^8 种次序.

因此在这种情形下,打字的次序有

$$N_1 = C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + \cdots + C_8^8 = 2^8 = 256(\text{种})$$

(2) 午饭前主任没有把第9号信交给秘书,午饭后秘书的同事打字要接触1~7号信和下午主任(不固定时间)送来的9号信,打字的次序有:

i 有一封信要打字,那只有9号信要打字,而这种情况已在(1)ii中计算过.

ii 有二封信要打字.

a. 1,2,3,4,5,6,7号信任何二封信要打字的次序为 C_7^2 种,而这种情况在(1)iii中计算过,不能重复计算.

b. 1,2,3,4,5,6,7号信中任一封信和9号信要打字,如3号和9号要打字,有两种次序,先打9号后打3号与先打3号后打9号,而先打9号后打3号这种次序在(1)iii中计算过,不能再重复计算,只有先打3号后打9号的次序是新的次序.因此增加了 C_7^1 种次序.

iii 有三封信要打字.

a. 1,2,3,4,5,6,7号信中任何三封要打字的次序有 C_7^3 种,但这些次序在(1)iv中计算过,也不能重复计算.

b. 1,2,3,4,5,6,7号信中任何二封和9号信一封要打字,例如1号,3号,9号三封信要打字,打信的次序有三种(从左到右为打字的先后次序):931,391和319(3号总是在1号前面).而931的次序在(1)iv中出现过,而391和319是新增加的两种次序.因此,新增加的次序有 $2C_7^2$ 种.

iv 有四封信要打字,新出现的次序有 $3C_7^3$ (种).

v 有五封信要打字,新出现的次序有 $4C_7^4$ (种).

vi 有六封信要打字,新出现的次序有 $5C_7^5$ (种).

vii 有七封信要打字,新出现的次序有 $6C_7^6$ (种).

viii 有八封信要打字,新出现的次序有 $7C_7^7$ (种).

综合(1)和(2)可知,午饭后要打字的次序种数为

$$N = (C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + \cdots + C_8^8) + (C_7^1 + 2C_7^2 + 3C_7^3 + \cdots + 7C_7^7) =$$

$$256 + 448 = 704$$