

❖ 猜名次

五个学生 A, B, C, D, E 参加一场比赛, 甲、乙二人在猜测比赛的结果, 甲猜测的名次顺序为 ABCDE, 结果没有猜中任何一个学生的名次, 也没猜中任何一对名次相邻的学生(所谓一对名次相邻的学生是指其中一个的名次紧接着另一个的名次); 乙猜想的名次顺序为 DAECB, 结果猜中了两个学生的名次, 并且猜中了两对学生名次是相邻的. 问比赛的实际结果是怎样的?

思路 问题即是寻找在 A, B, C, D, E 的所有排列中恰好符合甲、乙两个猜测者猜测结果的排列. 显然, 要对 $5! = 120$ 种排列逐一考查是不可行的, 问题的关键就是要根据两个猜测者的部分猜测结果, 筛选出一批可能的排列, 然后再根据剩余猜测结果对这批可能排列进行一一筛选, 最后得出实际比赛结果.

解法 1 以下用 $-A-B-$ 表示 A, B, C, D, E 中的 A, B 分别在第二、五位而其余元素未定的排列. 由乙的猜测结果 DAECB 猜中了两个学生的名次可知, 比赛结果的所有可能排列只有以下十类

DA— — —, D—E— —, D— —C—, D— — —B, —AE— —
—A—C—, —A— —B, — —EC—, — —E—B, — — —CB

显然, 如果在一对相邻名次的学生中, 有一个的名次是正确的, 那么另一个的名次也必定是正确的, 又对于乙猜想的名次序列 DAECB, 如果他猜中的两对相邻名次的学生中, 必定有一对的名次也是正确的, 因此, 如若不然, 被他猜中的两个学生中, 至少有一个属于猜中相邻名次中的某一对, 这一对的另一个学生的名次也将是正确的, 这样, 乙至少要猜中三个学生的名次, 与题设不合. 又甲猜测结果 ABCDE 未猜中任何一对名次相邻的学生的名次顺序, 因此, 对于上述十类排列按“猜测结果 ABCDE 未猜中任何一个学生的名次”条件列出的排列, 如果能够满足下面两个条件, 则即为实际比赛结果.

- (1) 某排列的所有顺次相邻的两元素对恰含有 DA, AE, EC, CB 之二;
 (2) 某排列的所有顺次相邻的两元素对不含有 AB, BC, CD, DE 之任一个.
 以 F_1, F_2 分别记某排列不满足(1), (2).

以下逐一对前十类排列先按“猜测结果 ABCDE 未测中任何一个学生的名次”条件列出每一类排列的所有可能的排列, 再逐一按(1), (2) 进行筛选, 如下面记法

$$D-E- \left\{ \begin{array}{l} DA EBC \quad (F_2) \\ DA ECB \quad (F_1) \\ DCEAB \quad (F_1) \\ DCEBA \quad (F_1) \end{array} \right.$$

表示 D-E- 这一类排列中, 按“猜测结果 ABCDE 未测中任何一个学生的名次”条件列出的所有排列有 DA EBC, DA ECB, DCEAB, DCEBA 四个, 而 DA EBC 不满足(2), 应筛选掉, DA ECB, DCEAB, DCEBA 三个均不满足(1), 故都应筛选掉, 其余为

$$DA- \left\{ \begin{array}{l} DABEC \quad (F_1) \\ DA ECB \quad (F_1) \\ DA EBC \quad (F_2) \end{array} \right. \quad D- \left\{ \begin{array}{l} DCAEB \quad (F_1) \\ DEACB \quad (F_1) \\ DA ECB \quad (F_1) \\ DCEAB \quad (F_1) \end{array} \right.$$

$$D- \left\{ \begin{array}{l} DA ECB \quad (F_1) \\ DEACB \quad (F_1) \\ DEBCA \quad (F_1) \end{array} \right. \quad -A-C \left\{ \begin{array}{l} BA ECD \quad (F_2) \\ EA BCD \quad (F_1) \\ DA ECB \quad (F_1) \\ EA DCB \quad (F_1) \end{array} \right.$$

$$-A- \left\{ \begin{array}{l} CA DEB \quad (F_1) \\ EA DCB \quad (F_1) \\ DA ECB \quad (F_1) \end{array} \right. \quad -AE- \left\{ \begin{array}{l} CA EBD \quad (F_1) \\ DA EBC \quad (F_2) \\ BA ECD \quad (F_2) \\ DA ECB \quad (F_1) \end{array} \right.$$

$$-EC- \left\{ \begin{array}{l} BA ECD \quad (F_2) \\ DA ECB \quad (F_1) \\ BDECA \quad (F_1) \end{array} \right. \quad -E-B \left\{ \begin{array}{l} CDEAB \quad (F_1) \\ DCEAB \quad (F_1) \\ DA ECB \quad (F_1) \end{array} \right.$$

$$-CB \left\{ \begin{array}{l} DEACB \quad (F_1) \\ DA ECB \quad (F_1) \\ EA DCB \quad (F_1) \\ EA DCB \quad (\checkmark) \end{array} \right.$$

综上, 比赛结果为 EDACB.

解法2 显然,如果在一对相邻名次的学生中,有一个的名次是正确的,那么另一个的名次也必定是正确的,分析乙猜测的名次顺序 DAECB,则有

(1) 他猜中的两对相邻名次的学生中,必定有一对的名次也是正确的,否则,被他猜中名次的两个学生中,至少有一个属于猜中相邻名次中的某一对,这一对的另一个学生的名次也将是正确的,这样,乙至少要猜中三个学生的名次,与题设条件不符.

(2) 这一对猜中名次的学生只可能位于边缘(即第1,2名或4,5名).因为,若不然,即这一名次位于中间(第2,3名或3,4名),那么,另一对猜中的相邻名次只有惟一的可能(第4,5名或1,2名),从而另一对学生名次也是正确的,与题设矛盾.

因此,乙的猜想只有下列四种可能:

i $\overline{\text{DAECB}}$ ii $\overline{\text{DAE CB}}$ iii $\overline{\text{DAE CB}}$ iv D AE CB

这里字母上面的画线表示名次是正确的,下面的画线表示相邻的名次是正确的.

下面分别就这四种情况,对照甲的猜想予以分析:

i $\overline{\text{DAECB}}$, B 不能在最后(否则,成为乙全部猜中),而应在第3名,即只能有 $\overline{\text{DAB EC}}$,但这时 A, B 两学生的名次是相邻的,与甲“没有猜中任何一对学生的名次是相邻的”不符,因此,这是不可能的.

ii $\overline{\text{DAE CB}}$, 与 i 做同样的分析,可知这也是不可能的.

iii $\overline{\text{DAE CB}}$, E 不可能在第3名,即只能是 $\overline{\text{EDA CB}}$,与甲的猜测的名次相对照,完全符合题设条件,所以实际比赛的结果可能为 EDACB.

iv D AE CB , 同理 D 不可能是第1名,即只可能是 $\overline{\text{AED CB}}$,这时学生 A 为第1名,也与甲“没有猜中任何一个学生的名次”不符,所以这种也是不可能的.

因而,实际比赛结果为 EDACB.