❖凸多面体

考察有 100 条棱的所有多面体.

(1) 设多面体是凸的,试问一个平面最多能与多面体的多少条棱相交?

(2) 对于非凸的有 100 条棱的多面体

ⅰ 一个平面可以与多达 96 条棱相交;

ⅱ 任何一个平面不可能与 100 条棱相交.

解 (1) 凸多面体的每一条棱都是两个面的公共边. 设该多面体有 n 个面,各面的边数分别为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 显然有

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 200, e_i \geqslant 3, i = 1, 2, \cdots, n$$

因此,$3n \leqslant 200, n \leqslant 66$. 凸多面体的各面都是凸多边形. 如果一张平面与某凸多边形相截,那么该平面至多与凸多边形的两条边相交. 因为凸多面体的每条棱是两个凸多边形面的公共边,所以一个平面至多只能与 n 条棱相交,$n \leqslant 66$. 下面将构造一个例子说明上界 66 可以达到. 参看图 1. 首先作一个以凸五边形 $ABCDE$ 为底面以 V_0 为顶点的凸锥形 P_0. 然后作一平面 π 与 P_0 的 6 条棱 CD, DE, V_0E, V_0A, V_0B 和 V_0C 相交. 对于 $0 < j \leqslant 30$,我们通过给多面体 P_{j-1} 贴附一个四面体 $V_jV_{j-1}AB$,构造多面体 P_j. 新添的顶点 V_j 在 P_{j-1} 的外侧接近 $V_{j-1}AB$

面的地方，并且需很接近于顶点 V_{j-1}，使得 V_j 与 V_{j-1} 在平面 π 的同侧，于是平面 π 与新添的棱 V_jA 和 V_jB 相交. 这样进行了 30 次之后，所得多面体 P_{30} 的总棱数为 $10+30\times 3=100$. 而凸多面体 P_{30} 与平面 π 相交的棱的数目为 $6+30\times 2=66$.

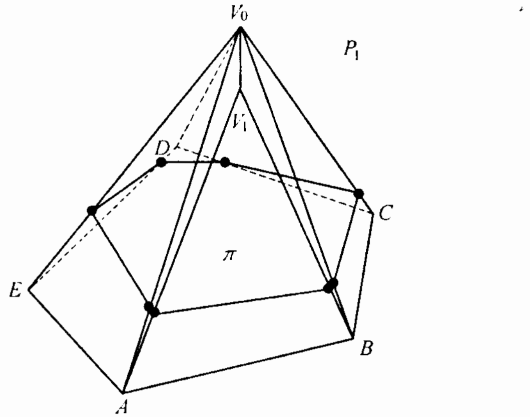

图 1

(2) i 我们将构造一个有 100 条棱的非凸多面体和与该多面体的 98 条棱相交的平面. 然后说明如何改变构造，使得相交棱数从 98 减到 96. 首先取定空间坐标系 $O-xyz$. 另外取定一数 h，并以平面 $z=h$ 作为以下构造的参照平面. 参看图 2，先取四面体 $ABCD$ 作为初始四面体，要求 AD 在参照平面 $z=h$ 上方，BC 在参照平面 $z=h$ 下方. 然后在 $\triangle ABD$ 内靠近点 B 处取一点 B'，在 $\triangle ACD$ 内靠近点 C 处取一点 C'（B' 和 C' 都在平面 $z=h$ 下方）. 从初始四面体 $ABCD$ 中切除四面体 $AB'C'D$，得到一个非凸多面体 $ABCDB'C'$. 该非凸多面体有六个面，其中四个是三角形面 $ABC, BCD, AB'C', B'C'D$，另外两个是凹四边形面 $ABDB', ACDC'$. 除了两条棱 BC 和 $B'C'$ 以外，参照平面 $z=h$ 与非凸多面体 $ABCDB'C'$ 的另外 8 条棱都相交. 以下我们称所构造的非凸多面体 $ABCDB'C'$ 为“基准多面体”. 以下将多次仿此作新的构造.

如图 3 所示，在三角形面 $AB'C'$ 取一接近 A 的点 A'（在参照平面 $z=h$ 上方）. 又以 $A'B'C'D$ 作为初始多面体，仿照上一段所述的办法构作一个类似于基准多面体的多面体. 做法是：在 $\triangle A'B'D$ 内取一接近 B' 的点 B''，在 $\triangle A'C'D$ 内取一接近 C' 的点 C''（B'' 和 C'' 都在平面 $z=h$ 的下方）. 设 $A'B'C'DB''C''$ 是所作出的仿基准多面体. 它有六个面，其中四个是三角形面 $A'B'C', B'C'D, A'B''C'', B''C''D$；另外两个是凹四边形面 $A'B'DB'', A'C'DC''$. 将所作的两个多面体 $ABCDB'C'$ 和 $A'B'C'DB''C''$ 粘合成一个多面体. 粘合而成的多面体有这样的特

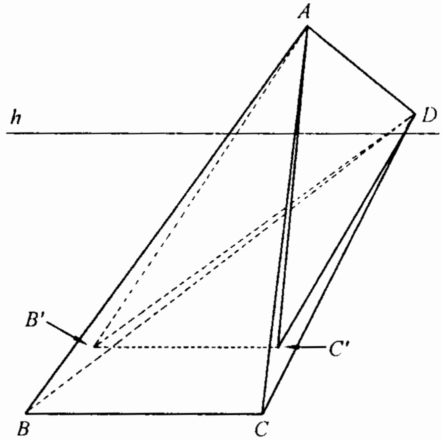

图 2

点:除了两条棱 BC 和 $B''C''$ 以外,所有其他的棱都与参照平面 $z = h$ 相交.原基准多面体有 10 条棱,粘合而成的多面体有 16 条棱.用这样的办法可以每次增加 6 条棱.到了 15 次之后,构造出一个有 100 条棱的多面体,其中恰有 98 条棱与参照平面 $z = h$ 相交.

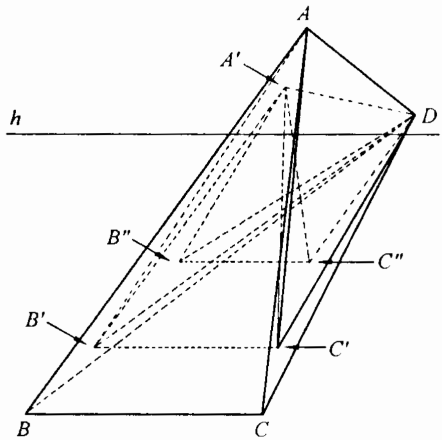

图 3

下面设法将数目 98 减少到 96,以适应题目的要求.我们将叙述从基准多面体 $ABCDB'C'$ 开始构造新多面体的另一种方法.如同前面一样,我们在三角形面 $AB'C'$ 内取点 A' 在参照平面 $z = h$ 的上方,在三角形面 $DB'C'$ 内取点 D' 也在参照平面 $z = h$ 的上方.以 $A'B'C'D'$ 作为初始四面体类似于前面的做法构造一个仿基准多面体 $A'B'C'D'B''C''$,并与原基准多面体 $ABCDB'C'$ 相粘合.这样得到的多面体较原基准多面体增添了 8 条棱.综合运用上面所述的两种构造方

法,可以得出一个有 98 条棱的多面体,其中的 96 条棱与参照平面 $z = h$ 相交.

还需将所构作的多面体的棱数增加到 100,以符合题目的要求.为此,我们在凹四边形面 $ABDB'$ 和 $ACDC'$ 中连结 BB' 和 CC',然后将 B' 和 C' 离开所在平面各向外稍作移动,其余的地方保留原构造.这样构作的多面体棱数增加到 100,而与参照平面 $z = h$ 相交的棱数仍为 96.

ⅱ 假设有一个平面 π 与多面体的所有棱都相交.选取空间坐标系 $O\text{-}xyz$,使得 $O\text{-}yz$ 坐标平面与 π 平行.多面体在 ox 轴上的投影是一个区间 $[a,b]$.对于 $x \in [a,b]$,过点 $(x,0,0)$ 作平行于 π 的平面 P_x.考察所作平面与多面体表面的交集.该交集由一些线段和若干离散点组成(对很多情形,可能没有一个离散点).约定以 $L(x)$ 表示 P_x 与多面体表面相交的那些线段长度之和.

引理 1 函数 $L(x)$ 的图像由一些直线段组成.$L(x)$ 是一个连续函数,并且

$$L(a) = L(b) = 0$$

引理的证明 考虑 P_x 与多面体表面交出的那些线段.每一线段的两端沿着多面体的棱变动.在 x 的变动过程中,只要 P_x 尚未遇到多面体的顶点,那么 $L(x)$ 在那一段必然是线性的,因此 $L(x)$ 是分段线性函数.因为对任意的 $x \in [a,b]$,多面体的棱都不会整段出现于 P_x 上(否则 π 就不能与那段棱相交),所以 $L(x)$ 必定连续变化.另外,显然 P_a 和 P_b 与多面体的交集仅含一些离散的点,所以 $L(a) = L(b) = 0$.设 $c \in (a,b)$,使得相应的平面 P_c 与多面体表面的交集不含多面体的任何顶点,则在 c 邻近 $L(x)$ 是线性函数并且取正值.因此,在 c 邻近 $L(x)$ 或者是增函数,或者是减函数,或者是常值函数.不妨设在 c 邻近 $L(x)$ 是单调减函数.在这假定下,我们陈述以下引理.

引理 2 函数 $L(x)$ 在区间 $[c,b]$ 上始终是单调非减函数.

引理的证明 设 d 是最大一个数,使得 $L(x)$ 在区间 $[c,d]$ 上是线性的.根据假定,函数 $L(x)$ 在这区间还是单调非减的.

现在考察 P_d 与多面体表面的交集.该交集必定含有多面体的顶点.先考虑交集仅含有一个顶点 A 的情形.可以证明经过 d 时,函数 $L(x)$ 仍保持单调非减性质.对于 P_d 与多面体表面的交集含多个离散点的情形,也可证明类似的结果.考察区间 $[c,b]$ 中函数 $L(x)$ 的线性段的转折点.对这些转折点逐一讨论,就能最终完成引理 2 的证明.

现在回到原来的问题(2)ⅱ.假定有一个平面与所有棱都相交,就能定义如上所述的函数 $L(x)$.该函数在 c 处取正值并且在 c 邻近单调非减.于是函数 $L(x)$ 保持单调非减直到 $x = b$ 处,但在该处都取 0 值,$L(b) = 0$.这样的函数不可能存在.因此不存在与多面体所有棱都相交的平面.

注 对于问题(2) i ,已经知道其他一些解答方法.另外,还有一个很漂亮的办法,证明可以有平面与100条棱多面体的98条棱相交.那个证明(连同很漂亮的图形)刊载在俄文"量子"杂志 Kvant,1994,2,pp.23 ~ 24.

尚不知道能否有平面与100条棱多面体的99条棱相交.问题还可进一步推广,有一类范围广阔的未解决的问题存在.