

❖ 波尔达维亚货币

波尔达维亚是一个奇特的国家,它的货币的单位是布尔巴基,可是钱币只

有两种:金币和银币.每一金币等于 n 布尔巴基,每一银币等于 m 布尔巴基($n, m \in \mathbf{N}$).用金币和银币可以组成 10 000 布尔巴基,1 875 布尔巴基,3 072 布尔巴基等等.实际上,波尔达维亚的货币体系并没有粗看上去那样奇特.

(1) 证明:只要保证有钱可找,就能购买任何价值为整数布尔巴基的货物.

(2) 证明:任何超过 $(mn - 2)$ 布尔巴基的货款均可支付,不需要找钱.

证明 10 000, 1 875, 3 072 的最大公约数为 1, 因此 m, n 的最大公约数为 1. 由培朱(Bezout) 定理, 存在正整数 α, β , 满足

$$\alpha n - \beta m = 1$$

于是要支付 k 布尔巴基, 只需付出 $k\alpha$ 个金币, 找回 $k\beta$ 个银币.

若 $k \geq mn - 1$, 则区间 $[k\beta m, k\alpha n]$ 中含有

$$k\alpha n - k\beta m + 1 = k + 1 \geq mn$$

两个连续整数, 其中必有一个为 mn 的倍数. 设为 tmn , 则 $tn - k\beta, k\alpha - tm$ 均非负. 用 $tn - k\beta$ 个银币, $k\alpha - tm$ 个金币即可支付 k 布尔巴基, 无需找钱.