

❖ 贪财的游客

一个岛上的游客试图得到宝藏. 为此, 他们要按如下规则打开漆有 n 种不同颜色的一系列的门. 规则如下:

- (1) 每个游客有 n 把钥匙, 每种颜色各一把;
 - (2) 每把钥匙一旦用了, 则必须一直用到损坏为止, 中间不许更换;
 - (3) 每把钥匙可以打开与它颜色不同的门, 在开与它同色的门时损坏.
- 求门的序列的“长度”至少是多少时, 每一位游客都不能得到财宝?

解 设 k_n 为最小长度

$$k_n \leq n^2 - 2n + 4, n \geq 3 \quad \text{①}$$

1973年, 有人证明了存在长度为 $n^2 - 2n + 4$ 的数列 S , 以 $1, 2, \dots, n$ 的每一个排列为其子数列 (我们称之为完全数列). 于是, 任一游客的钥匙序列 i_1, i_2, \dots, i_n 必为 S 的子序列. 在开门的过程中钥匙 i_1, i_2, \dots, i_n 将逐一损坏, 不能

由 $C_k = D_{k-1} U b_k 1$ 及 D_{k-1} 具有性质 D 推出.

iv D_k 具有性质 D , 因为 C_k 具有性质 C , 只需证明 D_k 含有 1 在其中出现, d_k 为结尾的 $(k+1)$ -排列, 由于 $D_k = D_{k-1} U b_k 1 d_k$, D_{k-1} 具有性质 D , 所以结论成立.

当 $k = n - 1$ 时, 性质 D 即表明 v 含有所有的 n -排列.

所以 $n^2 - 2n + 4$ 即是最小长度.