❖不能穿过的正方形

对于边长为 1 的正方形的内部或边上的线段组成的集合,如果穿过该正方形的每条直线,至少与该集合中的一条线段相交,则称该集合为不可穿越的集合.例如,正方形的两条对角线即构成了一个不可穿越的集合(图 1(a)).图 1(b) 给出了另一个不可穿越的集合.正方形两条对角线总长为 $2\times\sqrt{2}\approx 2.82$.利用初等微分运算可以证明,形如图 1(b) 给出的图形,其最小不可穿越集合的总长为 $1+\sqrt{3}\approx 2.73$.试求出一个不可穿越集合,其总长小于 $1+\sqrt{3}$.

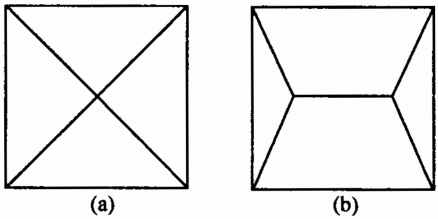

图 1

解　由两条相邻边及与之相对的半条对角线组成的不可穿越集合(图 2),其总长度为

$$2+\frac{\sqrt{2}}{2}<2+\frac{1.42}{2}=2.71<1+\sqrt{3}$$

边 AB,BC 和在一起,与 $\triangle ABC$ 相交的每条直线相交.因此,它们对于 $\triangle ABC$ 来说是不可穿越的.至于这个正方形的另一半,则由于半条对角线的存在,也是不可穿越的.

但是,对 $\triangle ABC$ 而言,还有一种很有意义的证明途径.如图 3,点 P 位于

$\triangle ABC$ 内，由这点向 $\triangle ABC$ 的三个顶点引出的线段，其夹角均为 120°. 点 P 称为该三角形的费马点(der Fermatisch Punkt). 这个点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离之和最小，即当 X 与 P 重合时，$XA + XB + XC$ 最小.

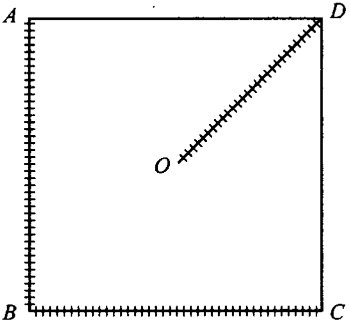

图 2

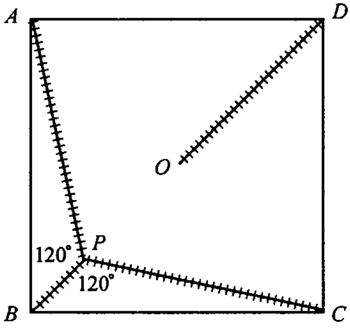

图 3

最小和 $PA + PB + PC$ 等于线段 BB' 之长，其中 B' 为以 AC 为底边向外引出的等边三角形的顶点(图 4). 很显然，在我们的情形下，BB' 恰是 AC 的垂直平分线，$\triangle ABE$ 是一个等腰三角形. 因此

$$BE = AE = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而

$$BB' = BE + EB' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

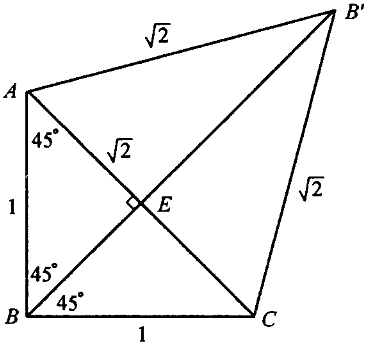

图 4

如果对三条线段 PA, PB 和 PC，再加上长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的半对角线 OD，则得到一个不可穿越集合，其总长为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \sqrt{3}) \approx 2.64$$