❖青蛙重叠

在一个正方形的四个顶点上各站有一只青蛙(将青蛙看做一个点).约定青蛙不能同时跳,但可以无先后顺序地跳动.且每次跳到以另三个青蛙的重心为对称中心的对称点.是否有一个青蛙能跳到另一个青蛙的身上?

解 由于每次跳动是以另三个青蛙的重心为对称中心.所以跳了一次后,再跳一次便跳回原处,即两次跳动等于没有跳动.因此,我们只要讨论以下这样的跳动就够了,即每个青蛙跳过后,下一次跳动是另一个青蛙.

记第 i 个青蛙在第 n 次跳动后的坐标为 $(x(i,n),y(i,n))$,$i=1,2,3,4$,$n=0,1,\cdots$ 而初始位置为

$$(x(1,0),y(1,0))=(1,1),(x(2,0),y(2,0))=(1,2)$$
$$(x(3,0),y(3,0))=(2,1),(x(4,0),y(4,0))=(2,2)$$

假设第 $n+1$ 次跳动轮到第四个青蛙,于是有

$$x(i,n+1)=x(i,n),y(i,n+1)=y(i,n),i=1,2,3$$

又前三个青蛙的重心的坐标为

$$P_n=\left(\frac{x(1,n)+x(2,n)+x(3,n)}{3},\frac{y(1,n)+y(2,n)+y(3,n)}{3}\right)$$

于是点 $(x(4,n),y(4,n))$ 关于点 P_n 的对称点为 $(x(4,n+1),y(4,n+1))$,它是

$$x(4,n+1)=\frac{2[x(1,n)+x(2,n)+x(3,n)]}{3}-x(4,n)$$

$$y(4,n+1)=\frac{2[y(1,n)+y(2,n)+y(3,n)]}{3}-y(4,n)$$

其中,$x(j,0),y(j,0)(j=1,2,3,4)$ 由整数构成.

下面用归纳法来证明:第 n 次跳动若由第 j 个青蛙完成,则 $x(n,j),y(n,j)$ 形如 $\frac{m_j}{3^n}$,其中整数 m_j 被3除不尽,而其余3个青蛙的坐标 $x(n,k),y(n,k)$ 形如 $\frac{m_k}{3^{n-1}}$,其中 m_k 为整数.

现在考虑第 $n+1$ 步,它由第 k 个青蛙完成,$k\neq j$.记 k,j,p,q 为1,2,3,4的一个排列,则

$$x(n+1,k)=\frac{2[x(n,j)+x(n,p)+x(n,q)]}{3}-x(n,k)=$$

$$\frac{2(m_j+3m_p+3m_q)}{3^{n+1}}-\frac{9m_k}{3^{n+1}}=\frac{m'_k}{3^{n+1}}$$

由于 3 除不尽 m_j,所以 3 除不尽 m'_k.这时第 j,p,q 个青蛙的位置坐标不变.对 y 坐标同法讨论,所以由归纳法便证明了断言.

最后,我们来证明,按照题目要求的跳法,则任何时候,不可能有一个青蛙跳到另一青蛙身上.事实上,若第 n 次跳动由第 j 个青蛙完成,它跳到第 k 个青蛙身上,即有

$$x(n,j)=x(n-1,k),y(n,j)=y(n-1,k)$$

即

$$x(n-1,k)=\frac{m_j}{3^n}$$

其中,3 除不尽 m_j.但是

$$x(n-1,k)=\frac{a_k}{3^v}$$

3 除不尽 a_k,$v\leqslant n-1$,这导出矛盾,所以断言成立.