❖阿里巴巴和四十大盗

阿里巴巴和40名大盗约定按如下方式分配1 987块金币:第一个强盗先将所有的宝藏分成两份,然后第二个强盗再将其中一份分成两份,如此等等.在这样分了40次以后,第一个强盗取走最多的一份,第二个强盗取走剩下的份数中最多的一份,如此下去,最后剩下的第41份则归阿里巴巴所有.试确定在这样的分配方式之下,每个强盗不依赖别人的行动,最多可以保证自己得到多少块金币?

解　第三个强盗及以后的强盗,可保证得1块.因为当其他强盗每次均多分出一堆1块时,无论这个强盗怎样分,前两个强盗取走两堆最多的后,剩下的

每堆都是 1 块.

第一个强盗,可保证得 50 块. 不论他怎么分,其他强盗陆续分出一堆堆都是 50 块金币,直至每堆都小于等于 50 块,然后任意分堆,直至分成 41 堆这时第一个强盗至多得 50 块,这样他至少得$\left[\frac{1\,987-1}{40}\right]=50$块(这里$[x]$表示不小于$x$的整数最小的那个).

第二个强盗可保证得 26 块. 如果第一个强盗分成两堆,一堆 993 块,一堆 994 块,共他强盗均与第二个强盗在同一堆里分堆,并且无论第二个强盗怎样分,他们分出的每一堆均由 26 块组成,直至剩下的块数不足 26 块. 这样,第二个强盗只能得到 26 块.

另一方面,设第一个人分成一堆 k 块,一堆$(1\,987-k)$块,$k<1\,987-k$. 这时有两种情况:

(1) 如果 $k \geqslant 987$(同时 $k \leqslant 993$). 第二个强盗分出一堆 1 块,一堆$(1\,986-k)$块. 第一个强盗至多取走$(1\,986-k)$块,第二个强盗至少可得

$$\left[\frac{k}{39}\right] \geqslant \left[\frac{987}{39}\right]=26(\text{块})$$

(2) 如果 $k<987$. 第二个强盗分$(1\,987-k)$块的那堆为$\left[\frac{1\,986-k}{2}\right]$块与$\left[\frac{1\,987-k}{2}\right]$块的两堆. 这时又有三种情况:

ⅰ 若 $k \leqslant 26$,则第二个强盗至少可得

$$\left[\frac{\left[\frac{1\,986-k}{2}\right]}{39}\right] \geqslant \left[\frac{980}{39}\right]=26(\text{块})$$

ⅱ 若 $26<k \leqslant 662$,则第二个强盗至少可得

$$\left[\frac{\left[\frac{1\,986-k}{2}\right]+k}{40}\right]=\left[\frac{\left[\frac{1\,986+k}{2}\right]}{40}\right] \geqslant \left[\frac{1\,007}{40}\right]=26(\text{块})$$

ⅲ 若 $663 \leqslant k(k<987)$,则第一个强盗至多取走 k 块,第二个强盗至少可得

$$\left[\frac{1987-k}{40}\right] \geqslant \left[\frac{1001}{40}\right]=26(\text{块})$$