❖整数的划分

能否将全体非负整数划分为 1 986 个集合，使得每个集合中即使只有 1 个整数，也要满足下述条件：即如果数 m 能够由 n 划去两个相邻的相同数码或是相同的数码组得到，则 m 和 n 属于同一集合(例如，数字 7，9 339 337，93 223 393 447，932 239 447 必将属于同一集合)？

解 为了回答这个问题，我们首先需要弄清楚每一个集合的组成情况，为此我们先来看看怎样的整数属于同一集合？我们可以先从最简单的情形入手.

首先，易知 12 和 21 属于同一集合，这是因为它们都应与 122121 属于同一集合. 由此不难想见，数字 $a_1,\cdots,a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{j-1}a_ja_{j+1}\cdots a_k$ 应当与数字 $a_1\cdots a_{i-1}a_ja_{i+1}\cdots a_{j-1}a_ia_{j+1}\cdots a_k$ 属于同一集合. 换言之，如果 m 和 n 是两个自然数，它们仅仅在某两个数位上对换了数码，那么它们一定属于同一集合. 为了说明这一点，我们举 $k=7, i=2, j=6$ 的情形作为例子，对于一般情形，完全可以作类似的说明，不过书写起来太长，不易看清楚罢了. 设

$$m = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7, n = a_1a_6a_3a_4a_5a_2a_7$$

容易看出，它们都可由下面的 l 逐步划去相邻的相同数码或数码组得出.

$$l = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_7a_6a_3a_4a_5a_2a_1a_1a_6a_3a_4a_5a_2a_7$$

事实上，如果我们先划去两个相邻的 a_1，再划去此时已变得相邻的两个数码组 $a_6a_3a_4a_5a_2$，再划去两个相邻的 a_7，即可得到 m；而如果按类似的办法，逐步划

去 l 的前 14 位数字,则又可得到 n,可见 m 与 n 确实同属一个集合.最后,由于数码 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的任一排列,都可通过一系列的两两对换得出.便知,如果 m 和 n 是两个自然数,它们仅仅是数码的排列顺序不同,那么它们也一定属于同一集合.

基于上述讨论,我们已经初步弄清了每个集合的组成情况.根据这一认识,我们可以看到,凡是每一个数码都在其中出现了偶数次的自然数,必都属于同一集合,我们将这个集合记作 M_0.例如,11,231321,400444,77888998,等等,都属于 M_0.对于其余的每一个集合,则都必然有一些数码在其中的每一个成员中出现了奇数次.显然,对于同一个集合的成员,都必然有同样一些数码出现奇数次;对于不同集合的成员,出现奇数次的数码必然不全相同.因此,每一个集合都对应着一个在其成员中出现奇数次的数码集合,即都对应着 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 的一个子集,而 M_0 可认为与空集 $\varnothing$ 对应,显然这种对应是一一的.因此上述集合的个数恰与 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 的子集个数相等,即为 $2^{10}=1\ 024$ 个,而题目中却要求分成 1 986 个,$1\ 986>1\ 024$,故知是不可能的.